RMS 2022 [1161]

> *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $0 < u_0 < \pi$ et par la relation de récurrence :*
>
> $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$
>
> **1❧** *Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.*
>
> **2❧** *En considérant $u_{n+1} - u_n$, démontrer que la série $\sum u_n^3$ converge.*
>
> **3❧** *En considérant $\ell n\, u_{n+1} - \ell n\, u_n$, démontrer que la série $\sum u_n^2$ diverge.*

1❧ Il est clair que l'intervalle $]0, \pi[$ est stable par sin, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et prend toutes ses valeurs dans cet intervalle. De plus,

$$\forall\, 0 < x < \pi, \quad 0 < \sin x < x$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Comme elle est minorée (par 0), elle converge vers un réel $\ell \in [0, \ell]$.

Puisque sin est continue sur $]0, \pi[$, si ℓ appartenait à cet intervalle ouvert, ce serait un point fixe de sin : il n'y en a pas. La seule possibilité qui reste compatible avec la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc : $\ell = 0$.

2❧ Comme u_n tend vers 0, on peut utiliser le développement limité de sin :

$$u_{n+1} - u_n = \sin u_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-u_n^3}{6}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement décroissante, on vient de comparer deux séries dont les termes généraux sont de signe constant (négatifs) et on déduit du Théorème de comparaison que les séries $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et $\sum u_n^3$ sont de même nature.

Or $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est une série télescopique et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc la série $\sum u_n^3$ est convergente.

3❧ Comme u_n tend vers 0 par valeurs *strictement positives*,

$$\ell n\, u_{n+1} - \ell n\, u_n = \ell n \frac{\sin u_n}{u_n} = \ell n\Big(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-u_n^2}{6}.$$

Avec le même raisonnement, les séries $\sum(\ell n\, u_{n+1} - \ell n\, u_n)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.

Mais comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors la suite de terme général $\ell n\, u_n$ tend vers $-\infty$, donc la série télescopique $\sum(\ell n\, u_{n+1} - \ell n\, u_n)$ diverge et, par comparaison, la série $\sum u_n^2$ diverge.

✍ *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = \sin^\alpha u_n - u_n^\alpha = u_n^\alpha \cdot \Big[\Big(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\Big) - 1\Big]$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-\alpha}{6} \cdot u_n^{2+\alpha}.$$

En choisissant $\alpha = -2$, on constate que la différence $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite finie non nulle (égale à $1/3$). On en déduit que la série télescopique est grossièrement divergente et que sa n-ième somme partielle

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha) = u_n^\alpha - u_0^\alpha \sim u_n^{-2}$$

est aussi équivalente, lorsque n tend vers $+\infty$, à $n/3$. Par conséquent,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}},$$

ce qui explique tout ce qui précède !