RMS 2022 [1149]

On pose $E = \mathbb{R}[X]$.

1❧ *Calculer*

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, *sachant que* $I_0 = 1$.

2❧ *Pour* $P, Q \in E$, *on pose*

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt.$$

Démontrer que φ *est un produit scalaire sur* E *et calculer la distance de* X^3 *au sous-espace* $\mathbb{R}_2[X]$.

1❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n = \left[t \mapsto t^n e^{-t^2}\right]$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est négligeable devant e^{-t} (= fonction intégrable de référence) au voisinage de $+\infty$, puisque

$$t^n e^{-t^2} = e^{-t} \cdot \left[t^n e^t e^{-t^2}\right] = e^{-t} \cdot \left[\exp \underbrace{\left(-t^2 + t + n \ln t\right)}_{\to 0}\right]$$

Donc la fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

❧ Pour tout n impair, la fonction f_n est impaire et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et, par imparité, $I_n = 0$.

❧ Pour n pair, la fonction f_n est paire et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

En intégrant par parties, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-t^{2p-1}}{2} \cdot (-2te^{-t^2})\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2p-1}{2} \cdot t^{2p-2} e^{-t^2}\,dt \\ &= \frac{2p-1}{2} \cdot I_{2(p-1)}. \end{aligned}$$

✍ ***Variante avec la fonction*** Γ

Par parité,

$$I_{2p} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (t^2)^p e^{-t^2}\,dt$$

et le changement de variable $u = t^2$ *nous donne*

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \left(p - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \left(p - \frac{1}{2}\right) \cdot I_{2(p-1)}$$

grâce à la propriété "bien connue" : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

On en déduit par récurrence que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p} = \prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2} = \frac{(2p)!}{4^p p!}.$$

2❧ On a démontré que $t^n e^{-t^2}$ était intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Par combinaison linéaire, $P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ quels que soient les polynômes P et Q, donc φ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

D'après les propriétés de l'intégrale, φ est donc bilinéaire, symétrique et aussi positive puisque

$$\forall\, P \in E,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad P(t)^2 e^{-t^2} \geqslant 0.$$

Si $\varphi(P,P) = 0$, alors $P(t)^2 e^{-t^2} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (fonction continue et positive dont l'intégrale est nulle) et par conséquent $P = 0_E$.

Donc φ est bien un produit scalaire sur E.

❧ Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace DE DIMENSION FINIE, la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$ est bien définie. Notons p_2, cette projection orthogonale.

► Le projeté $p_2(X^3)$ est l'unique polynôme $aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$\forall\, k \in [\![0,2]\!], \quad \varphi\big(X^3-(aX^2+bX+c),\, X^k\big) = 0.$$

On obtient ainsi le système de Gram suivant :

$$\begin{cases} a\varphi(X^2,1) + b\varphi(X,1) + c\varphi(1,1) = \varphi(X^3,1) \\ a\varphi(X^2,X) + b\varphi(X,X) + c\varphi(1,X) = \varphi(X^3,X) \\ a\varphi(X^2,X^2) + b\varphi(X,X^2) + c\varphi(1,X^2) = \varphi(X^3,X^2) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} aI_2 + bI_1 + cI_0 = I_3 \\ aI_3 + bI_2 + cI_1 = I_4 \\ aI_4 + bI_3 + cI_2 = I_5 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} aI_2 + cI_0 = 0 \\ bI_2 = I_4 \\ aI_4 + cI_2 = 0 \end{cases}.$$

On déduit de la relation de récurrence entre les I_{2p} que

$$(a,b,c) = \left(0, \frac{I_4}{I_2}, 0\right) = (0, 3/2, 0).$$

✍ *En observant que $\varphi(X,1) = \varphi(X,X^2) = 0$, on pouvait se simplifier la tâche.*

$$\begin{cases} \mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1,X^2) \overset{\perp}{\oplus} \mathbb{R}\cdot X \\ p_2(X^3) = (aX^2+c) + (bX) \end{cases}$$

Il restait à observer que $\varphi(X^3,1) = \varphi(X^3,X^2) = 0$: comme X^3 est orthogonal à 1 et à X^2, projeter X^3 sur le sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$ ou sur la droite $\mathbb{R}\cdot X$, c'est pareil... et rien n'est plus simple que de projeter sur une droite !

$$p_2(X^3) = \frac{\varphi(X^3,X)}{\varphi(X,X)} \cdot X = \frac{I_4}{I_2} \cdot X$$

► D'après le cours, la distance cherchée est égale à $\sqrt{\varphi\big(X^3, X^3 - p_2(X^3)\big)}$. Or

$$\varphi\big(X^3, X^3-p_2(X^3)\big) = \varphi(X^3,X^3) - b\varphi(X^3,X) = I_6 - \frac{3}{2}\cdot I_4 = \frac{3}{4}$$

donc $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \sqrt{3}/2$.