RMS 2022 [1135]

> *Soit X, une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.*
>
> **1❧** *Calculer la probabilité pour que X soit paire et la probabilité pour que X soit un multiple de 3.*
>
> **2❧** *Ces événements sont-ils indépendants ?*

1❧ Comme X est, par hypothèse, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad [X = n] \in \mathcal{A}.$$

Par conséquent,

$$A = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} [X = 2k] \quad \text{et} \quad B = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} [X = 3k]$$

sont deux événements (= des éléments de la tribu $\mathcal{A}$).

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} \\
&= p(1-p) \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}, \\
\mathbf{P}(B) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 3k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{3k-1} \\
&= p(1-p)^2 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^3} = \frac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}.
\end{aligned}$$

2❧ Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, X est simultanément multiple de 2 et multiple de 3 si, et seulement si, X est multiple de 6 :

$$A \cap B = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^*} [X = 6k]$$

et, comme précédemment,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = 6k) = p(1-p)^5 \cdot \frac{1}{1-(1-p)^6}.$$

Or

$$1 - q^6 = (1-q^3)(1+q^3) = (1-q^3)(1+q)(1-q+q^2).$$

✍ *C'est toujours utile de bien connaître les racines sixièmes de l'unité...*

Donc

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{(1-p)^5}{(3-3p+p^2)(2-p)(1-p+p^2)} = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) \cdot \frac{(1-p)^2}{1-p+p^2}.$$

Comme $(1-p)^2 = 1 - 2p + p^2 \neq 1 - p + p^2$ pour tout $p \in \,]0,1[$, on en déduit que $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A).\mathbf{P}(B)$ et donc que ces deux événements ne sont pas indépendants.