RMS 2022 [1165]

On cherche à résoudre l'équation

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt \tag{E}$$

où l'inconnue f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1❧ *Donner les solutions de l'équation différentielle $y'' + cy = 0$. (On discutera sur $c \in \mathbb{R}$.)*

2❧ *Soit f, une solution de (E) autre que la fonction identiquement nulle. On pose*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt.$$

Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) = 0.$$

3❧ *Soit f, une solution de (E). Calculer $f(0)$ et $f''(x)f(y) - f(x)f''(y)$.*

4❧ *En déduire les solutions de (E).*

1❧ On discute sur le signe de c.

- Si $c = 0$, les solutions sont les fonctions affines : $y(x) = ax + b$.
- Si $c = \omega^2 > 0$, les solutions sont périodiques :

$$y(x) = a\sin\omega x + b\sin\omega x.$$

- Si $c = -\omega^2 < 0$, les solutions divergent :

$$y(x) = a\,\mathrm{sh}\,\omega x + b\,\mathrm{ch}\,\omega x.$$

2❧ Comme f est une solution de (E), elle est continue sur $\mathbb{R}$ et, d'après le Théorème fondamental, pour tout $y \in \mathbb{R}$ (fixé), l'application

$$[x \mapsto F(x,y)]$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y).$$

Comme f n'est pas identiquement nulle, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) \neq 0$ et par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{f(x+y_0) - f(x-y_0)}{f(y_0)}.$$

Donc f est en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

✍ *Bien entendu, on peut continuer (par récurrence) et en déduire que f est en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

❧ Appliquons à nouveau le Théorème fondamental : les dérivées partielles de F sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned}\forall M = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad & \frac{\partial F}{\partial x}(M) = f(x+y) - f(x-y) \\ \text{et} \quad & \frac{\partial F}{\partial y}(M) = f(x+y) - \big[-f(x-y)\big] \\ & \phantom{\frac{\partial F}{\partial y}(M)} = f(x+y) + f(x-y).\end{aligned}$$

Comme F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que les applications

$$[(x,y) \mapsto x+y] \quad \text{et} \quad [(x,y) \mapsto x-y]$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ (elles sont linéaires), les dérivées partielles de F sont en fait de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et donc F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

❧ D'après l'expression des dérivées partielles,

$$\forall\, M = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) = f'(x+y) - f'(x-y)$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) = f'(x+y) - f'(x-y)$$

donc F vérifie bien l'équation des ondes (ou équation de D'Alembert) avec $c = 1$.

✍ *En notant P_0, une primitive de f sur (l'intervalle) $\mathbb{R}$, on a*

$$F(x,y) = P_0(x+y) - P_0(x-y)$$

où P_0 est de classe $\mathscr{C}^2$: on ne devrait pas être étonné de retrouver l'équation des ondes !

3❧ D'après (E),

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(0) = \int_x^x f(t)\, dt = 0.$$

Donc : ou bien $f(x)$ est identiquement nul, et en particulier $f(0) = 0$; ou bien $f(x)$ n'est pas identiquement nul et on a quand même $f(0) = 0$.

❧ Comme f est une solution de (E), alors

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = f(x)f(y)$$

et par conséquent

$$\forall\, M = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x)f(y) - f(x)f''(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M) = 0$$

d'après la question précédente.

4❧ Il est clair que la fonction nulle est une solution de (E). Dorénavant, nous ne nous intéresserons qu'aux solutions non identiquement nulles de (E) en choisissant un réel y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$.

D'après la question précédente,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - \frac{f''(y_0)}{f(y_0)} \cdot f(x) = 0$$

et nous reprenons la discussion menée dans la première question avec

$$c = -\frac{f''(y_0)}{f(y_0)},$$

en tenant compte de la contrainte $f(0) = 0$ établie précédemment.

► Si $c = -f''(y_0)/f(y_0) = 0$, alors f est une fonction affine telle que $f(0) = 0$, donc $f(x) = ax$. L'équation (E) devient alors

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (ax).(ay) = 2axy.$$

Il n'y a que deux possibilités : $a = 0$ (solution identiquement nulle) et $a = 2$.

► Si $c > 0$, alors f est de la forme $a \sin \omega x$ et l'équation (E) devient cette fois

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (a \sin \omega x).(a \sin \omega y) = \frac{2a \sin \omega \sin \omega y}{\omega}.$$

À nouveau, il n'y a que deux possibilités : $a = 0$ et $a = {}^2/_\omega$.

► Si $c < 0$, alors f est de la forme $a \operatorname{sh} \omega x$ et l'équation (E) devient maintenant

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (a \operatorname{sh} \omega x)(a \operatorname{sh} \omega y) = \frac{2a \operatorname{sh} \omega x \operatorname{sh} \omega y}{\omega}$$

et une fois encore : $a = 0$ ou $a = {}^2/_{\omega}$.

❧ En reprenant les calculs qui précèdent, on vérifie que les expressions trouvées sont toutes des solutions de (E), indépendamment de la valeur choisie pour $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$[x \mapsto 0]\,, \quad [x \mapsto 2x]\,, \quad \left[x \mapsto \frac{2 \sin \omega x}{x}\right], \quad \left[x \mapsto \frac{2 \operatorname{sh} \omega x}{x}\right]$$

pour un paramètre $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ arbitrairement choisi.