RMS 2022 [1204]

> *Soient u et v, deux endomorphismes de E, espace vectoriel complexe de dimension finie. Démontrer que toute valeur propre λ de $u \circ v$ est aussi une valeur propre de $v \circ u$.*
> Indication : *on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.*

❧ **Cas $\lambda = 0$**

Puisque E est un espace de dimension finie, le réel 0 est une valeur propre de $u \circ v$ si, et seulement si, $\det(u \circ v) = 0$. Or

$$\det(v \circ u) = \det v . \det u = \det(u \circ v) = 0$$

donc 0 est aussi une valeur propre de $v \circ u$.

✍ ***Variante** sans déterminant.*

Si 0 n'est pas une valeur propre de $v \circ u$, alors $v \circ u$ est injectif, donc u est injectif, donc (Théorème du rang, puisque u est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie) u est inversible. De ce fait, l'endomorphisme

$$v = (v \circ u) \circ u^{-1}$$

est injectif comme composé d'endomorphismes injectifs et $u \circ v$ est alors injectif (pour la même raison).

❧ **Cas $\lambda \neq 0$**

Soit $x \in E$, un vecteur propre de $u \circ v$ associé à $\lambda \neq 0$:

$$u\big(v(x)\big) = \lambda \cdot x \neq 0_E$$

(puisque $\lambda \neq 0$ par hypothèse et $x \neq 0_E$ en tant que vecteur propre). Par conséquent, $v(x) \neq 0_E$ et en composant par v l'égalité précédente, on obtient

$$v\big[u\big(v(x)\big)\big] = v(\lambda \cdot x)$$

c'est-à-dire

$$(v \circ u)\big(v(x)\big) = \lambda \cdot v(x).$$

Comme $v(x) \neq 0_E$, on en déduit que $v(x)$ est un vecteur propre de $v \circ u$ associé à λ.

✍ *Voir aussi* `[RMS2022_1135]` *sur le même thème.*