RMS 2022 [1213]

1❧ *Calculer la limite de*

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big).$$

2❧ *Calculer un équivalent de*

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} (n+k)^{1/n}.$$

1❧ La fonction $[t \mapsto \ln(1+t)]$ est continue sur le segment $[0,1]$. Donc les sommes de Riemann R_n convergent vers

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \big[(1+t)\ln(1+t) - t\big]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

2❧ Chaque réel S_n est un produit de réels strictement positifs, donc

$$\ln S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) = \ln n + R_n.$$

Par conséquent,

$$S_n = n \cdot e^{R_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \cdot e^{2\ln 2 - 1} = \frac{4n}{e}.$$

✍ ***Variante avec la formule de Stirling***
Si on remarque que

$$S_n = \Big(\frac{(2n)!}{n!}\Big)^{1/n},$$

on peut tenter d'appliquer la Formule de Stirling :

$$\frac{(2n)!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}\cdot e^{-n}4^n n^n.$$

Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{n!}\cdot\Big(\frac{e}{4n}\Big)^n = \sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*.$$

On a ici une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général strictement positif, qui converge vers une limite $\ell > 0$. Par conséquent,

$$u_n^{1/n} \overset{\text{déf.}}{=} \exp\frac{\ln u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0) = 1.$$

En l'occurrence,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \cdot \frac{e}{4n} = 1$$

et on retrouve bien le résultat précédent.

Attention ! *En général, la composition d'équivalents produit des résultats hasardeux. C'est pourquoi on a pris soin ici de composer des limites.*