RMS 2022 [824]

‖ *Déterminer les fonctions continues* $f : [0,1] \to [0,1]$ *telles que* $f \circ f = f$.

Par hypothèse,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f\big(f(x)\big) = f(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall\, y \in J = f_*([0,1]), \quad f(y) = y.$$

Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, son image J est également un segment $[m, M]$.

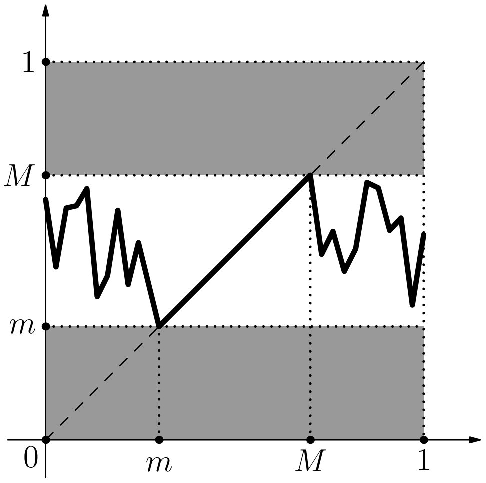
Réciproquement, si on considère une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ dont l'image est le segment $[m, M]$ et si

$$\forall\, x \in [m, M], \quad f(x) = x,$$

alors

$$\forall\, x \in [0,1], \quad (f \circ f)(x) = f\big(\underbrace{f(x)}_{\in[m,M]}\big) = f(x).$$

Ainsi, les fonctions cherchées sont les fonctions f telles que $f(y) = y$ pour tout y appartenant à l'image de f.



✍ *Pour* $0 \leqslant y < m$ *et* $M < y \leqslant 1$, *on peut choisir* $f(y)$ *arbitrairement, en se bornant à respecter deux contraintes :* f *doit être continue sur* $[0,1]$ *et*

$$\forall\, y \in [0, m[\cup]M, 1], \quad m \leqslant f(y) \leqslant M.$$

REMARQUE.— Si $0 < m < M$ ou si $m < M < 1$, alors la fonction f ne peut pas être dérivable (point anguleux pour l'abscisse m dans le premier cas et pour l'abscisse M dans le second cas).

Ainsi, si on impose à f d'être dérivable sur $[0,1]$, les seules fonctions possibles sont $[x \mapsto x]$ d'une part et les fonctions constantes $[x \mapsto C]$ (pour lesquelles on a $m = M = C$) d'autre part.