RMS 2022 [825]

Soient f *et* g*, deux applications continues de* $[0,1]$ *dans* $[0,1]$*, telles que*

$$f \circ g = g \circ f.$$

On note f^n *et* g^n *les itérées* n*-ièmes de* f *et* g *:*

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} \qquad g^n = \underbrace{g \circ g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}.$$

1❧ *On suppose que*

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) < g(x).$$

Démontrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad g^n(x) \geqslant f^n(x) + n\alpha.$$

2❧ *En déduire qu'il existe* $c \in [0,1]$ *tel que* $f(c) = g(c)$*.*

1❧ Comme f et g sont continues sur le segment $[0,1]$, la différence $g - f$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle atteint son minimum en un point $x_0 \in [0,1]$. Avec l'hypothèse qui est faite, ce minimum est strictement positif : on pose donc

$$\alpha = g(x_0) - f(x_0) = \min_{x \in [0,1]} g(x) - f(x) > 0.$$

❧ On a donc, par définition de α,

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g(x) \geqslant f(x) + \alpha \tag{1}$$

et la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

❧ Cette propriété est vérifiée pour $n = 0$, puisque $f^0(x) = g^0(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

❧ Supposons pour terminer la démonstration par récurrence qu'il existe un rang $n \geqslant 1$ tel que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g^n(x) \geqslant f^n(x) + n\alpha. \tag{2}$$

En appliquant (1) avec $x \leftarrow g^n(x)$, on obtient

$$g^{n+1}(x) = g\big(g^n(x)\big) \geqslant f\big(g^n(x)\big) + \alpha.$$

Comme f et g commutent, alors f et g^n commutent aussi et donc

$$f\big(g^n(x)\big) + \alpha = g^n\big(f(x)\big) + \alpha \geqslant \big[f^n\big(f(x)\big) + n\alpha\big] + \alpha$$

par hypothèse de récurrence (avec cette fois $x \leftarrow f(x)$). On a ainsi démontré que

$$\forall\, x \in [0,1], \quad g^{n+1}(x) \geqslant f^{n+1}(x) + (n+1)\alpha$$

et donc que la propriété étudiée était héréditaire.

❧ On a donc démontré par récurrence que la propriété (2) était vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2❧ Par hypothèse, f et g prennent leurs valeurs dans $[0,1]$. Il en va donc de même pour f^n et g^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1], \quad \underbrace{g^n(x) - f^n(x)}_{\leqslant 1} \geqslant n\alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty,$$

ce qui est absurde.

L'hypothèse

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) < g(x)$$

est donc fausse, donc il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) \geqslant g(a)$.

Par symétrie, l'assertion suivante est fausse également :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f(x) > g(x).$$

Donc, parmi tous les $a \in [0,1]$ tels que $f(a) \geqslant g(a)$, il en existe au moins un pour lequel $f(a) = g(a)$.