RMS 2022 [823]

> *Déterminer toutes les fonctions continues* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *telles que*
> $$f\big(f(x)\big) = x.$$

Une telle fonction réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et est sa propre réciproque. L'identité $[x \mapsto x]$ est une telle fonction. Y en a-t-il d'autres ?

❧ Comme f est continue et injective, il faut que f soit (strictement) monotone.

Supposons qu'il existe $x_0 \geqslant 0$ tel que $y_0 = f(x_0) \neq x_0$. On a aussi

$$f(y_0) = (f \circ f)(x_0) = x_0$$

et comme x_0 et y_0 jouent des rôles symétriques, on peut supposer que $x_0 < y_0$. On a donc

$$x_0 < y_0 \quad \text{et} \quad y_0 = f(x_0) > f(y_0) = x_0.$$

Comme f est monotone, il faudrait que f fût décroissante.

Mais comme f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, il existe un réel $z_0 \geqslant 0$ tel que $f(z_0) = 0$. Comme f est strictement décroissante et positive, on aurait donc

$$\forall\, x > z_0, \quad 0 \leqslant f(x) < f(z_0) = 0$$

ce qui est absurde.

❧ Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = x$.

✍ *Si on cherchait* f *continue de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$*, alors la fonction inverse* $[x \mapsto {}^1\!/_x]$ *serait une solution.*