# 4 Primitives

## I

## Calculs de primitives

**1.** Calculer les primitives des expressions suivantes.

$$\frac{2(t+1)}{t^2+2t+3} \qquad \frac{2t+3}{t^2+3t+3} \qquad \frac{2t-3}{t^2-3t+4} \qquad \frac{1}{t\,\ell\mathrm{n}\,t}$$
$$\frac{1}{t\,\ell\mathrm{n}^2\,t} \qquad \frac{2\sin t}{(1+\cos t)^2} \qquad \frac{3\cos t}{(2\sin t+1)^2} \qquad 3te^{-t^2}$$
$$\frac{\operatorname{Arcsin} t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \frac{\sin 2t}{3+\sin^2 t} \qquad \frac{\sin 2t}{4+\cos^2 t}$$

**2.** Calculer les primitives des expressions suivantes.

**2.1 Fonctions en $u'/u$**

$$\frac{2t+3}{t^2+3t+2} \qquad (-2,-1)$$
$$\frac{2t-5}{t^2-5t+6} \qquad (2,3)$$
$$\frac{2t-2}{t^2-2t-3} \qquad (-1,3)$$

**2.2 Primitives télescopiques**

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$$
$$\frac{1}{t^2-5t+6} = \frac{-1}{t-2} + \frac{1}{t-3}$$
$$\frac{1}{t^2-2t-3} = \frac{1}{4}\cdot\Big(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+1}\Big).$$

**2.3 Combinaisons linéaires**

En déduire que

$$\int^x \frac{t^2}{t^2+3t+2}\,\mathrm{d}t = x + \ell\mathrm{n}(x+1) - 4\,\ell\mathrm{n}(x+2)$$
$$\int^x \frac{t^2}{t^2-5t+6}\,\mathrm{d}t = x + 9\,\ell\mathrm{n}(x+3) - 4\,\ell\mathrm{n}(x-2)$$
$$\int^x \frac{t^2}{t^2-2t-3}\,\mathrm{d}t = x + \frac{9}{4}\,\ell\mathrm{n}(x-3) - \frac{1}{4}\,\ell\mathrm{n}(x+1)$$

**3. Primitives en** Arctan

Pour tout $a>0$,

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2} \equiv \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a}.$$

En déduire les primitives des expressions suivantes.

$$\frac{1}{t^2+2t+3} = \frac{1}{(t+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$
$$\frac{1}{t^2+3t+3} = \frac{1}{(t+{}^3\!/\!_2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$
$$\frac{1}{t^2-3t+4} = \frac{1}{(t-{}^3\!/\!_2)^2+(\sqrt{7}/2)^2}$$

**4.** Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$,

$$\frac{2x^2+x-1}{x^2-4x+3} = 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{10}{x-3}.$$

Une primitive est

$$2x + \ell\mathrm{n}\,\frac{(x-3)^{10}}{(x-1)}.$$

**5.** Lorsque le dénominateur est un polynôme irréductible de degré 2, les primitives sont la superposition d'un polynôme, d'un logarithme et d'une Arctan.

**5.1** Avec

$$f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2+2x+3},$$

on a

$$f(x) = 2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2x+x}{x^2+2x+3} + \frac{6}{(x+1)^2+2}.$$

Une primitive de $f$ est donc

$$F(x) = 2x - \frac{3}{2}\,\ell\mathrm{n}(x^2+2x+3) + 3\sqrt{2}\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

**5.2** Avec

$$f(x) = \frac{x^2+1}{4x^2+4x+5},$$

on a

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\cdot\frac{8x+4}{4x^2+4x+5} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1+(x+1/2)^2}.$$

Une primitive de $f$ est donc

$$F(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\,\ell\mathrm{n}(4x^2+4x+5) + \frac{1}{16}\operatorname{Arctan}(x+1/2).$$

**5.3** Une primitive de

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x+3} = \frac{2x+1}{x^2+x+3} + \frac{2}{(x+{}^1\!/\!_2)^2+{}^{11}\!/\!_4}$$

est

$$F(x) = \ell\mathrm{n}(x^2+x+3) + \frac{4}{\sqrt{11}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}.$$

**5.4** Une primitive de

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x+4} = \frac{2x+2}{x^2+2x+4} - \frac{1}{(x+1)^2+3}$$

est

$$F(x) = \ell\mathrm{n}(x^2+2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{\sqrt{3}}.$$

## II

## Intégration par parties

**6.** Pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{\sqrt{a}} ue^{-xu}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2} - \frac{1+x\sqrt{a}}{x^2}\,e^{-x\sqrt{a}}.$$

**7.** Soit $a \in \mathbb{C}^*$.
**7.1** Pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_d$ de degré $d$ tel que $P_d(t)e^{at}$ soit une primitive de $t^d e^{at}$.
**7.2** Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P_d'(t) + aP_d(t) = t^d.$$

Donc $P_d = b_0 + \cdots + b_d X^d$ avec $ab_d = 1$ et

$$\forall\, 0 \leqslant k < d, \quad ab_k = \frac{-(k+1)}{a}\, b_{k+1}.$$

Par conséquent,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant d, \quad b_k = \frac{(-1)^{d-k} d!}{a^{d-k+1} k!}.$$

**8.** **L'astuce habituelle**

$$\int^x \ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t \equiv x\,\ell\mathrm{n}\, x - x$$
$$\int^x t\,\ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t \equiv \frac{x^2}{2}\,\ell\mathrm{n}\, x - \frac{x^2}{2}$$
$$\int^x t^2 \cos t\,\mathrm{d}t \equiv 2x\cos x + (x^2-2)\sin x$$
$$\int^x t^2 \sin t\,\mathrm{d}t \equiv 2x\sin x + (2-x^2)\cos x$$
$$\int^x t\exp(at)\,\mathrm{d}t \equiv \frac{ax-1}{a^2}e^{ax}$$
$$\int^x t^2\exp(at)\,\mathrm{d}t \equiv \frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}e^{ax}$$
$$\int^x t\cos t\,\mathrm{d}t \equiv \cos x + x\sin x$$
$$\int^x t\sin t\,\mathrm{d}t \equiv \sin x - x\cos x$$
$$\int^x \ell\mathrm{n}\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\,\mathrm{d}t \equiv x\,\ell\mathrm{n}\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big) + 2\,\mathrm{Arctan}\, x$$
$$\int^x \mathrm{Arctan}\, t\,\mathrm{d}t \equiv x\,\mathrm{Arctan}\, x - \frac{1}{2}\,\ell\mathrm{n}(1+x^2)$$
$$\int^x \mathrm{Arcsin}\, t\,\mathrm{d}t \equiv x\,\mathrm{Arcsin}\, x + \sqrt{1-x^2}$$
$$\int^x \mathrm{Arccos}\, t\,\mathrm{d}t \equiv x\,\mathrm{Arccos}\, x - \sqrt{1-x^2}$$
$$\int^x t\,\mathrm{Arctan}\, t\,\mathrm{d}t \equiv \frac{1+x^2}{2}\,\mathrm{Arctan}\, x - \frac{x}{2}$$

**9.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\int^x \sin\omega t e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{-(a\sin\omega x + \omega\cos\omega x)e^{-ax}}{a^2+\omega^2}$$

et

$$\int^x \cos\omega t e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{(-a\cos\omega x + \omega\sin\omega x)e^{-ax}}{a^2+\omega^2}$$

par double intégration par parties ou en passant par les complexes. Quelle est la méthode la plus efficace ?

**10.** **Fonction $B$ d'Euler**
Pour $i$ et $j$ dans $\mathbb{N}$, on pose

$$B_{i,j} = \int_0^1 t^i(1-t)^j\,\mathrm{d}t.$$

Alors

$$B_{i,j} = \frac{i!j!}{(i+j+1)!}$$

et en particulier

$$\binom{n}{k}\cdot B_{k,n-k} = \frac{1}{n+1}.$$

NB : $B(i,j) = B_{i-1,j-1}$.

**11.** Pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2e^{-x} - e^{-2x}}{2x} - \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$

**12.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

Alors la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive. De plus,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 2nI_{n+1} = \frac{1}{2^n} - (1-2n)I_n$$

et la série $\sum I_n$ est convergente.

## III

## Changement de variable

**13.**

$$t\cos t^2 \qquad \sin 2t e^{\cos 2t} \qquad \frac{\sin 2t}{1+\sin^2 t}$$
$$\frac{\cos\sqrt{2t}}{\sqrt{t}} \qquad \frac{2t^3+t}{t^4+t^2+1} \qquad \frac{t^3}{1+t^4}$$

**14.** Soit $k \in \mathbb{N}$. On peut calculer l'intégrale

$$\int_a^b t^k\,\ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t$$

en intégrant par parties :

$$\int t^k\,\ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t \equiv \frac{t^{k+1}\,\ell\mathrm{n}\, t}{k+1} - \frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}$$

ou en changeant de variable :

$$\int_a^b t^k\,\ell\mathrm{n}\, t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)^2}\int_a^b (k+1)t^k\,\ell\mathrm{n}(t^{k+1})\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{(k+1)^2}\int_{a^{k+1}}^{b^{k+1}} \ell\mathrm{n}\, u\,\mathrm{d}u.$$

**15.**

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \exp(\cos t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \exp(\sin t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \exp(\sin t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/2} \exp(\sin 2u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

**16.**

$$\int_0^{\pi/2} \exp(\sin t)\cos t\,\mathrm{d}t = e - 1$$

**17. Polynômes en** tan
On cherche les primitives d'une expression de la forme

$$\sum_{k=0}^{d} a_k \tan^k x.$$

**17.1** Comme

$$\tan^{2p+2} x = \tan^{2p} x \cdot (1+\tan^2 x) - \tan^{2p} x,$$

les primitives de $\tan^k x$ pour $k$ pair sont, à $\pm x$ près, des polynômes en $\tan x$.
**17.2** Comme

$$\tan^{2p+1} x = \frac{\sin^{2p} x}{\cos^{2p+1} x} \cdot \sin x,$$

les primitives de $\tan^k x$ pour $k$ impair sont, à $\pm \ell\mathrm{n}\cos x$ près, des polynômes en $\tan x$.
**18.** Sur l'intervalle $]-\pi/4, \pi/2[$, une primitive de

$$\frac{1}{1+\tan t}$$

a pour expression

$$\frac{t}{2} + \frac{\ell\mathrm{n}(1+\tan t)}{2} - \frac{\ell\mathrm{n}(1+\tan^2 t)}{4}.$$

**19.1** Sur l'intervalle $]-\pi,\pi[$, une primitive de

$$\frac{1}{1+\cos t}$$

est $\tan t/2$.
**19.2** Sur l'intervalle $[0,\pi]$ (et même un peu plus !), une primitive de

$$\frac{1}{1+\sin t}$$

a pour expression

$$\frac{-2}{1+\tan(t/2)}.$$

**20.** Appliquer le changement de variable $u = 1/t$ aux intégrales suivantes.

$$\int_a^b \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$
$$\int_a^b \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

**21.** Étudier en fonction de $a$ les expressions suivantes.

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^x te^{-at}\,\mathrm{d}t$$

**22.** Appliquer le changement de variable $u = \sqrt{t}$ à l'intégrale suivante.

$$\int_1^x e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

**23.** Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable.

$$\int_0^{\pi} t\cos t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(\pi^2)}{2} \qquad \int_1^e \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2(e^{\sqrt{x}} - e)$$
$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\sin t\,\mathrm{d}t = 1/5 \qquad \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Arctan} e - \frac{\pi}{4}$$
$$\int_1^e \frac{\ell\mathrm{n}^2\, t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\ell\mathrm{n}^3\, e}{3} \qquad \int_1^e \frac{\ell\mathrm{n}\, t^2}{t}\,\mathrm{d}t = \ell\mathrm{n}^2\, e$$

**24.** Les primitives de

$$\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}$$

s'expriment à l'aide de

$$\frac{1}{2}\,\ell\mathrm{n}\,\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{1+\sqrt{1-t^2}}.$$

Prolongement continu à l'origine ?
**25.** Le changement de variable $u = e^{-x}$ nous donne $\exp(-e^{-x})$ pour primitive de $\exp(-x)\cdot\exp(-e^{-x})$. Graphe de cette primitive ?
**26.** Le changement de variable $u = t^2$ nous donne $-\sqrt{1-t^2}$ pour primitive de

$$\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

## IV

## Théorème fondamental

**27.** Soit $f$, une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\left[x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

est une primitive de $f$. Toutes les primitives de $f$ sont-elles de cette forme ? (Considérer $f(t) = t$ et $f(t) = 1/(1+t^2)$.)
**28.** On s'intéresse aux primitives de $\cos^n x$ et de $\sin^n x$.
**28.1** Si $n$ est pair, les primitives de $\cos^n x$ et $\sin^n x$ ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}$.
**28.2** Si $n = 2p+1$, alors

$$\cos^n x = (1-\sin^2 x)^p \cdot \cos x \quad \text{et} \quad \sin^n x = (1-\cos^2 x)^p \cdot \sin x$$

donc les primitives de $\cos^n x$ (resp. de $\sin^n x$) sont des polynômes en $\sin x$ (resp. en $\cos x$) et sont donc bornées sur $\mathbb{R}$.
**29.** Pour tout $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

**29.1** Démontrer que $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer $\varphi'$. (L'application $\varphi$ est constante.)
**29.2** Retrouver le résultat précédent avec le changement de variable $u = 1/t$.

# I

## Équations du premier ordre

**1. Variation de la constante**
On suppose connue une solution $x_0$ de l'équation différentielle homogène
$$\forall\, t \in I, \quad x'(t) + a(t)x(t) = 0$$
et on cherche une solution particulière de l'équation complète
$$\forall\, t \in I, \quad x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$$
de la forme
$$x(t) = K(t)x_0(t).$$
Alors
$$\forall\, t \in I, \quad K'(t)x_0(t) = b(t).$$

**2. Filtre passe-bas**
**2.1** La fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle
$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \tau x'(t) + x(t) = e^{i\omega t}$$
si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{C}$ telle que
$$\forall\, t \geqslant 0, \quad x(t) = Ke^{-t/\tau} + \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}.$$
**2.2** Pourquoi un filtre dont la sortie vérifie cette équation différentielle est-il appelé *filtre passe-bas* ?
**3.1** La fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad tx'(t) - x(t) = 0$$
si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = Kt.$$
**3.2** L'équation $tx'(t) - x(t) = 1$ admet $-1$ pour solution particulière.
**3.3** L'équation $tx'(t) - x(t) = \cos t$ admet
$$-\cos x - x\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$
pour solution particulière.
**4.** On s'intéresse aux équations différentielles de la forme suivante.
$$\forall\, t > 0, \quad tx'(t) + x(t) = b(t).$$
**4.1** Les solutions de l'équation homogène sont $K/t$.
**4.2** Pour $b(t) \equiv 1$, une solution particulière est 1.
**4.3** Pour $b(t) = t$, une solution particulière est $t/2$.
**4.4** Pour $b(t) = 1 + 2t$, une solution particulière est $(t+1)$ (par superposition).
**5.** La fonction $x(t)$ est solution de
$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad tx'(t) + x(t) = 0$$
si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = \frac{K}{t}.$$
La seule solution sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.

**6.** On s'intéresse aux équations différentielles de la forme suivante.
$$\forall\, t > 0, \quad x'(t) + tx(t) = b(t).$$
**6.1** Les solutions de l'équation homogène sont $K\exp(-t^2/2)$.
**6.2** Pour $b(t) = t$, une solution particulière est 1.
**6.3** Pour $b(t) = t^2 + 1$, une solution particulière est $t$.
**6.4** Pour $b(t) = (t+1)^2$, une solution particulière est $(t+2)$ (par superposition).
**6.5** Pour $b(t) = \exp(-t^2/2)$, une solution particulière est
$$te^{-t^2/2}.$$

**7.** On s'intéresse à l'équation différentielle
$$t^2x'(t) + x(t) = 1.$$
**7.1** L'application $[t \mapsto 1]$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$.
**7.2** Si $x$ est une solution, alors il existe deux constantes $\lambda_-$ et $\lambda_+$ telles que
$$\forall\, t < 0, \quad x(t) = 1 + \lambda_- \exp(1/t)$$
et
$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = 1 + \lambda_+ \exp(1/t).$$
**7.3** Il n'existe qu'une seule solution définie sur $\mathbb{R}$.
**8.** Résoudre l'équation
$$x^2y'(x) + (1 - 2x)y(x) = x^2.$$

**9.** Résoudre l'équation
$$y'(x) - y(x)\tan x + \cos^2 x = 0.$$

# II

## Équations du second ordre

**10.** On suppose que $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ est différent de 2.
La fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + 4x(t) = e^{i\omega t}$$
si, et seulement si, il existe deux constantes $A$ et $B$ telles que
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{e^{i\omega t}}{4 - \omega^2}.$$

**11. Problèmes de Cauchy**
La fonction $f$ est une solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 3x''(t) + 8x'(t) + 4x(t) = 0$$

si, et seulement si, il existe deux constantes $A$ et $B$ telles que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = Ae^{-2t} + Be^{-2t/3}.$$

Résolutions de quelques problèmes de Cauchy :

| f(0) | f′(0) | (A,B) |
|---|---|---|
| 1 | -2 | (1,0) |
| 2 | -8/3 | (1,1) |
| 3 | -2 | (0,3) |

**12.** Si l'équation caractéristique

$$X^2 - sX + p = 0$$

admet deux solutions réelles, alors l'équation complète

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - sx'(t) + px(t) = e^{i\omega t}$$

admet pour solution particulière

$$x_0(t) = \frac{(p-\omega^2) + is\omega}{(p-\omega^2)^2 + s^2\omega^2}\, e^{i\omega t}.$$

**12.1** La solution générale de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = e^{i\omega t}$$

est de la forme

$$x(t) = Ae^t + Be^{3t} + \frac{1-2i}{10}\, e^{it}$$

pour $\omega = 1$ et de la forme

$$x(t) = Ae^t + Be^{3t} - \frac{1+8i}{65}\, e^{2it}$$

pour $\omega = 2$.
**12.2** La solution générale de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = e^{it}$$

est de la forme

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{3t} - \frac{2+i}{10}\, e^{it}.$$

**12.3** La solution générale de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = e^{it}$$

est de la forme

$$x(t) = Ae^{-2t} + Be^{-4t} + \frac{7-6i}{85}\, e^{it}.$$

**13. Problèmes de Cauchy**
**13.1** La solution de l'équation

$$x''(t) - 4x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = 5$ et $x'(0) = 2$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = 2e^{-2t} + 3e^{2t}.$$

**13.2** La solution de l'équation

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = 2$ et $x'(0) = 5$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = 2e^t + 3te^t.$$

**13.3** La solution de l'équation

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = 1$ et $x'(0) = -3$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = e^{-t}(\cos t - 2\sin t).$$

**13.4** La solution de l'équation

$$x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = \sqrt{2}/2$ et $x'(0) = 5\sqrt{2}/2$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad e^{2t}\sin(3t + \pi/4).$$

Quelle est la solution qui vérifie $x(0) = 1$ et $x'(0) = 5$ ?

## III

## Raccordements

**14.1** Une fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) + x(t) = \sin t$$

si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = Ke^{-t} + \frac{\sin t - \cos t}{2}.$$

**14.2** On considère la fonction $b(t)$ définie par

$$\forall\, t \leqslant 0, \quad b(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, t \geqslant 0, \quad b(t) = \sin t.$$

1. Si une fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) + x(t) = b(t)$$

alors il existe deux constantes $A$ et $B$ réelles telles que

$$\forall\, t \leqslant 0, \quad x(t) = Ae^{-t}$$

et

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad x(t) = Be^{-t} + \frac{\sin t - \cos t}{2}.$$

2. La fonction $x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $A = B - 1/2$.
3. Il n'y a pas de solution de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (car la fonction $b$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

**15.1** Sur $I = ]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, une fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$tx'(t) + x(t) = 0$$

si, et seulement si, il existe une constante $K$ telle que

$$\forall\, t \in I, \qquad x(t) = \frac{K}{t}.$$

**15.2** L'équation $tx'(t) + x(t) = 1$ admet $[t \mapsto 1]$ pour seule solution sur $\mathbb{R}$.

**15.3** L'application

$$\left[t \mapsto \frac{1-\cos t}{t}\right]$$

admet un prolongement $f_0$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
L'équation $tx'(t) + x(t) = \sin t$ admet $f_0$ pour seule solution sur $\mathbb{R}$.

# IV

## Changements de variable

**16.** On considère le changement de variable $u = \ell n\, t$.
**16.1** La fonction $y(u)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad ay''(u) + by'(u) + cy(u) = f(u)$$

si, et seulement si, la fonction $x(t) = y(\ell n\, t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t > 0, \quad at^2x''(t) + (a+b)tx'(t) + cx(t) = f(\ell n\, t).$$

**16.2** Avec $(a,b,c) = (1,2,1)$, l'équation

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) + 3tx'(t) + x(t) = f(\ell n\, t)$$

se ramène à

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad y''(u) + 2y'(u) + y(u) = f(u).$$

1. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = \frac{A + B\,\ell n\, t}{t}.$$

2. Avec $f(u) = u$, une solution particulière de l'équation complète

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) + 3tx'(t) + x(t) = \ell n\, t$$

est $x(t) = -2 + \ell n\, t$ (qui découle de $y(u) = u - 2$).
3. Avec $f(u) = e^u$, une solution particulière de l'équation complète

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) + 3tx'(t) + x(t) = t$$

est $x(t) = {}^t\!/_4$ (qui découle de $y(u) = {}^{e^u}\!/_4$).
**16.3** Avec $(a,b,c) = (1,-5,6)$, l'équation

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) - 4tx'(t) + 6x(t) = f(\ell n\, t)$$

se ramène à

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad y''(u) - 5y'(u) + 6y(u) = f(u).$$

4. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = At^2 + Bt^3.$$

5. Avec $f(u) = 6u$, une solution particulière de l'équation complète

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) - 4tx'(t) + 6x(t) = 6\,\ell n\, t$$

est

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = \frac{5}{6} + \ell n\, t.$$

6. Avec $f(u) = 2e^u$, une solution particulière de l'équation complète

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) - 4tx'(t) + 6x(t) = 2t$$

est $x(t) = t$.

**17.** On considère le changement de variable $u = t^2$.
**17.1** La fonction $y(u)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, u > 0, \quad ay''(u) + by'(u) + cy(u) = f(u)$$

si, et seulement si, la fonction $x(t) = y(t^2)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t > 0, \quad atx''(t) + (2bt^2 - a)x'(t) + 4ct^3x(t) = 4t^3f(t^2).$$

**17.2** Avec $(a,b,c) = (1,2,1)$, l'équation

$$tx''(t) + (4t^2 - 1)x'(t) + 4t^3x(t) = 0$$

devient

$$y''(u) + 2y'(u) + y(u) = 0.$$

La solution générale est donc

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = (A + Bt^2)e^{-t^2}.$$

**17.3** Avec $(a,b,c) = (1,-5,6)$, l'équation

$$tx''(t) - (1 + 10t^2)x(t) + 24t^3x(t) = 0$$

devient

$$y''(u) - 5y'(u) + 6y(u) = 0.$$

La solution générale est donc

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = Ae^{-2t^2} + Be^{-3t^2}.$$

# V

## Équations du second ordre

**18.** La solution générale de l'équation différentielle

$$y''(x) - y(x) = \operatorname{ch} x$$

est

$$y(x) = Ae^x + B + \frac{xe^x + e^{-x}}{4}.$$

**19.** La solution générale de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = \cos x$$

est

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x} + \frac{\cos t}{10} + \frac{\sin t}{5}.$$

**20.** La solution générale de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = \sin x$$

est

$$y(x) = (A\cos x + B\sin x)e^x + \frac{\sin x}{5} + \frac{2\cos x}{5}.$$