I
Calculs de primitives

1. Calculer les primitives des expressions suivantes.

$$\frac{2(t+1)}{t^2+2t+3} \qquad \frac{2t+3}{t^2+3t+3} \qquad \frac{2t-3}{t^2-3t+4} \qquad \frac{1}{t\,\ell n\, t}$$
$$\frac{1}{t\,\ell n^2\, t} \qquad \frac{2\sin t}{(1+\cos t)^2} \qquad \frac{3\cos t}{(2\sin t+1)^2} \qquad 3te^{-t^2}$$
$$\frac{\operatorname{Arcsin} t}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \frac{\sin 2t}{3+\sin^2 t} \qquad \frac{\sin 2t}{4+\cos^2 t}$$

2. Calculer les primitives des expressions suivantes.

2.1 Fonctions en u'/u

$$\frac{2t+3}{t^2+3t+2} \qquad (-2,-1)$$
$$\frac{2t-5}{t^2-5t+6} \qquad (2,3)$$
$$\frac{2t-2}{t^2-2t-3} \qquad (-1,3)$$

2.2 Primitives télescopiques

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}$$
$$\frac{1}{t^2-5t+6} = \frac{-1}{t-2} + \frac{1}{t-3}$$
$$\frac{1}{t^2-2t-3} = \frac{1}{4}\cdot\Big(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+1}\Big).$$

2.3 Combinaisons linéaires
En déduire que

$$\int^x \frac{t^2}{t^2+3t+2}\,dt = x + \ell n(x+1) - 4\,\ell n(x+2)$$
$$\int^x \frac{t^2}{t^2-5t+6}\,dt = x + 9\,\ell n(x+3) - 4\,\ell n(x-2)$$
$$\int^x \frac{t^2}{t^2-2t-3}\,dt = x + \frac{9}{4}\,\ell n(x-3) - \frac{1}{4}\,\ell n(x+1)$$

3. Primitives en Arctan
Pour tout $a > 0$,

$$\int^x \frac{dt}{a^2+t^2} \equiv \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a}.$$

En déduire les primitives des expressions suivantes.

$$\frac{1}{t^2+2t+3} = \frac{1}{(t+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$
$$\frac{1}{t^2+3t+3} = \frac{1}{(t+3/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$
$$\frac{1}{t^2-3t+4} = \frac{1}{(t-3/2)^2+(\sqrt{7}/2)^2}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1;3\}$,

$$\frac{2x^2+x-1}{x^2-4x+3} = 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{10}{x-3}.$$

Une primitive est

$$2x + \ell n\,\frac{(x-3)^{10}}{(x-1)}.$$

5. Lorsque le dénominateur est un polynôme irréductible de degré 2, les primitives sont la superposition d'un polynôme, d'un logarithme et d'une Arctan.

5.1 Avec
$$f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2+2x+3},$$
on a
$$f(x) = 2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{2x+x}{x^2+2x+3} + \frac{6}{(x+1)^2+2}.$$
Une primitive de f est donc
$$F(x) = 2x - \frac{3}{2}\,\ell n(x^2+2x+3) + 3\sqrt{2}\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

5.2 Avec
$$f(x) = \frac{x^2+1}{4x^2+4x+5},$$
on a
$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\cdot\frac{8x+4}{4x^2+4x+5} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1+(x+1/2)^2}.$$
Une primitive de f est donc
$$F(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\,\ell n(4x^2+4x+5) + \frac{1}{16}\operatorname{Arctan}(x+1/2).$$

5.3 Une primitive de
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x+3}{x^2+x+3} \\ &= \frac{2x+1}{x^2+x+3} + \frac{2}{(x+1/2)^2+11/4} \end{aligned}$$
est
$$F(x) = \ell n(x^2+x+3) + \frac{4}{\sqrt{11}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}.$$

5.4 Une primitive de
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x+1}{x^2+2x+4} \\ &= \frac{2x+2}{x^2+2x+4} - \frac{1}{(x+1)^2+3} \end{aligned}$$
est
$$F(x) = \ell n(x^2+2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{Arctan}\frac{x+1}{\sqrt{3}}.$$

II

Intégration par parties

6. Pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{\sqrt{a}} ue^{-xu}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2} - \frac{1+x\sqrt{a}}{x^2}\,e^{-x\sqrt{a}}.$$

7. Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

7.1 Pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_d de degré d tel que $P_d(t)e^{at}$ soit une primitive de $t^d e^{at}$.

7.2 Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P_d'(t) + aP_d(t) = t^d.$$

Donc $P_d = b_0 + \cdots + b_d X^d$ avec $ab_d = 1$ et

$$\forall\ 0 \leqslant k < d, \quad ab_k = \frac{-(k+1)}{a}\,b_{k+1}.$$

Par conséquent,

$$\forall\ 0 \leqslant k \leqslant d, \quad b_k = \frac{(-1)^{d-k}d!}{a^{d-k+1}k!}.$$

8. **L'astuce habituelle**

$$\int^x \ell\mathrm{n}\,t\,\mathrm{d}t \equiv x\,\ell\mathrm{n}\,x - x$$

$$\int^x t\,\ell\mathrm{n}\,t\,\mathrm{d}t \equiv \frac{x^2}{2}\,\ell\mathrm{n}\,x - \frac{x^2}{2}$$

$$\int^x t^2\cos t\,\mathrm{d}t \equiv 2x\cos x + (x^2-2)\sin x$$

$$\int^x t^2\sin t\,\mathrm{d}t \equiv 2x\sin x + (2-x^2)\cos x$$

$$\int^x t\exp(at)\,\mathrm{d}t \equiv \frac{ax-1}{a^2}e^{ax}$$

$$\int^x t^2\exp(at)\,\mathrm{d}t \equiv \frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}e^{ax}$$

$$\int^x t\cos t\,\mathrm{d}t \equiv \cos x + x\sin x$$

$$\int^x t\sin t\,\mathrm{d}t \equiv \sin x - x\cos x$$

$$\int^x \ell\mathrm{n}\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\,\mathrm{d}t \equiv x\,\ell\mathrm{n}\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big) + 2\,\mathrm{Arctan}\,x$$

$$\int^x \mathrm{Arctan}\,t\,\mathrm{d}t \equiv x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\,\ell\mathrm{n}(1+x^2)$$

$$\int^x \mathrm{Arcsin}\,t\,\mathrm{d}t \equiv x\,\mathrm{Arcsin}\,x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int^x \mathrm{Arccos}\,t\,\mathrm{d}t \equiv x\,\mathrm{Arccos}\,x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int^x t\,\mathrm{Arctan}\,t\,\mathrm{d}t \equiv \frac{1+x^2}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{x}{2}$$

9. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\int^x \sin\omega t e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{-(a\sin\omega x + \omega\cos\omega x)e^{-ax}}{a^2+\omega^2}$$

et

$$\int^x \cos\omega t e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{(-a\cos\omega x + \omega\sin\omega x)e^{-ax}}{a^2+\omega^2}$$

par double intégration par parties ou en passant par les complexes. Quelle est la méthode la plus efficace ?

10. **Fonction B d'Euler**

Pour i et j dans $\mathbb{N}$, on pose

$$B_{i,j} = \int_0^1 t^i(1-t)^j\,\mathrm{d}t.$$

Alors

$$B_{i,j} = \frac{i!j!}{(i+j+1)!}$$

et en particulier

$$\binom{n}{k}\cdot B_{k,n-k} = \frac{1}{n+1}.$$

NB : $B(i,j) = B_{i-1,j-1}$.

11. Pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2e^{-x}-e^{-2x}}{2x} - \int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

Alors la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive. De plus,

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad 2nI_{n+1} = \frac{1}{2^n} - (1-2n)I_n$$

et la série $\sum I_n$ est convergente.

III

Changement de variable

13.

$t\cos t^2$	$\sin 2t e^{\cos 2t}$	$\dfrac{\sin 2t}{1+\sin^2 t}$
$\dfrac{\cos\sqrt{2t}}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{2t^3+t}{t^4+t^2+1}$	$\dfrac{t^3}{1+t^4}$

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. On peut calculer l'intégrale

$$\int_a^b t^k\,\ell\mathrm{n}\,t\,\mathrm{d}t$$

en intégrant par parties :

$$\int t^k\,\ell\mathrm{n}\,t\,\mathrm{d}t \equiv \frac{t^{k+1}\,\ell\mathrm{n}\,t}{k+1} - \frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}$$

ou en changeant de variable :

$$\begin{aligned}\int_a^b t^k\,\ell\mathrm{n}\,t\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{(k+1)^2}\int_a^b (k+1)t^k\,\ell\mathrm{n}(t^{k+1})\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{(k+1)^2}\int_{a^{k+1}}^{b^{k+1}} \ell\mathrm{n}\,u\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\exp(\cos t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2}\exp(\sin t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\exp(\sin t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi/2}\exp(\sin 2u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

16.

$$\int_0^{\pi/2}\exp(\sin t)\cos t\,\mathrm{d}t = e-1$$

17. Appliquer le changement de variable $u = {}^1/_t$ aux intégrales suivantes.

$$\int_a^b \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$
$$\int_a^b \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$$

18. Étudier en fonction de a les expressions suivantes.

$$\int_1^x \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^x te^{-at}\,\mathrm{d}t$$

19. Appliquer le changement de variable $u = \sqrt{t}$ à l'intégrale suivante.

$$\int_1^x e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

20. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable.

$$\int_0^{\pi} t\cos t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(\pi^2)}{2} \qquad \int_1^e \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2(e^{\sqrt{x}}-e)$$
$$\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin t\,\mathrm{d}t = {}^1/_5 \qquad \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Arctan} e - \frac{\pi}{4}$$
$$\int_1^e \frac{\ell\mathrm{n}^2\, t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\ell\mathrm{n}^3\, e}{3} \qquad \int_1^e \frac{\ell\mathrm{n}\, t^2}{t}\,\mathrm{d}t = \ell\mathrm{n}^2\, e$$

IV

Théorème fondamental

21. Pour tout $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\ell\mathrm{n}\, t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

21.1 Démontrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer φ'. (L'application φ est constante.)
21.2 Retrouver le résultat précédent avec le changement de variable $u = {}^1/_t$.

Équations différentielles

I

Équations du premier ordre

1. Variation de la constante
On suppose connue une solution x_0 de l'équation différentielle homogène
$$\forall\, t \in I, \quad x'(t) + a(t)x(t) = 0$$
et on cherche une solution particulière de l'équation complète
$$\forall\, t \in I, \quad x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$$
de la forme
$$x(t) = K(t)x_0(t).$$
Alors
$$\forall\, t \in I, \quad K'(t)x_0(t) = b(t).$$

2. Filtre passe-bas
2.1 La fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle
$$\forall\, t \geqslant 0, \quad \tau x'(t) + x(t) = e^{i\omega t}$$
si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{C}$ telle que
$$\forall\, t \geqslant 0, \quad x(t) = Ke^{-t/\tau} + \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}.$$
2.2 Pourquoi un filtre dont la sortie vérifie cette équation différentielle est-il appelé *filtre passe-bas* ?
3.1 La fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad tx'(t) - x(t) = 0$$
si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = Kt.$$
3.2 L'équation $tx'(t) - x(t) = 1$ admet -1 pour solution particulière.
3.3 L'équation $tx'(t) - x(t) = \cos t$ admet
$$-\cos x - x\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$
pour solution particulière.
4. On s'intéresse aux équations différentielles de la forme suivante.
$$\forall\, t > 0, \quad tx'(t) + x(t) = b(t).$$
4.1 Les solutions de l'équation homogène sont K/t.
4.2 Pour $b(t) \equiv 1$, une solution particulière est 1.
4.3 Pour $b(t) = t$, une solution particulière est $t/2$.
4.4 Pour $b(t) = 1 + 2t$, une solution particulière est $(t + 1)$ (par superposition).
5. La fonction $x(t)$ est solution de
$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad tx'(t) + x(t) = 0$$
si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que
$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = \frac{K}{t}.$$
La seule solution sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.

6. On s'intéresse aux équations différentielles de la forme suivante.
$$\forall\, t > 0, \quad x'(t) + tx(t) = b(t).$$
6.1 Les solutions de l'équation homogène sont $K\exp(-t^2/2)$.
6.2 Pour $b(t) = t$, une solution particulière est 1.
6.3 Pour $b(t) = t^2 + 1$, une solution particulière est t.
6.4 Pour $b(t) = (t + 1)^2$, une solution particulière est $(t + 2)$ (par superposition).
6.5 Pour $b(t) = \exp(-t^2/2)$, une solution particulière est
$$te^{-t^2/2}.$$

7. On s'intéresse à l'équation différentielle
$$t^2x'(t) + x(t) = 1.$$
7.1 L'application $[t \mapsto 1]$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$.
7.2 Si x est une solution, alors il existe deux constantes λ_- et λ_+ telles que
$$\forall\, t < 0, \quad x(t) = 1 + \lambda_- \exp(1/t)$$
et
$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = 1 + \lambda_+ \exp(1/t).$$
7.3 Il n'existe qu'une seule solution définie sur $\mathbb{R}$.

II

Équations du second ordre

8. On suppose que $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ est différent de 2.
La fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + 4x(t) = e^{i\omega t}$$
si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t + \frac{e^{i\omega t}}{4 - \omega^2}.$$

9. Problèmes de Cauchy
La fonction f est une solution de l'équation différentielle
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad 3x''(t) + 8x'(t) + 4x(t) = 0$$
si, et seulement si, il existe deux constantes A et B telles que
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = Ae^{-2t} + Be^{-2t/3}.$$
Résolutions de quelques problèmes de Cauchy :

f(0)	f'(0)	(A,B)
1	-2	(1,0)
2	$-8/3$	(1,1)
3	-2	(0,3)

10. Si l'équation caractéristique

$$X^2 - sX + p = 0$$

admet deux solutions réelles, alors l'équation complète

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - sx'(t) + px(t) = e^{i\omega t}$$

admet pour solution particulière

$$x_0(t) = \frac{(p-\omega^2) + is\omega}{(p-\omega^2)^2 + s^2\omega^2}\, e^{i\omega t}.$$

10.1 La solution générale de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = e^{i\omega t}$$

est de la forme

$$x(t) = Ae^t + Be^{3t} + \frac{1-2i}{10}\, e^{it}$$

pour $\omega = 1$ et de la forme

$$x(t) = Ae^t + Be^{3t} - \frac{1+8i}{65}\, e^{2it}$$

pour $\omega = 2$.

10.2 La solution générale de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = e^{it}$$

est de la forme

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{3t} - \frac{2+i}{10}\, e^{it}.$$

10.3 La solution générale de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x''(t) + 6x'(t) + 8x(t) = e^{it}$$

est de la forme

$$x(t) = Ae^{-2t} + Be^{-4t} + \frac{7-6i}{85}\, e^{it}.$$

11. Problèmes de Cauchy

11.1 La solution de l'équation

$$x''(t) - 4x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = 5$ et $x'(0) = 2$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = 2e^{-2t} + 3e^{2t}.$$

11.2 La solution de l'équation

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = 2$ et $x'(0) = 5$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = 2e^t + 3te^t.$$

11.3 La solution de l'équation

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = 1$ et $x'(0) = -3$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = e^{-t}(\cos t - 2\sin t).$$

11.4 La solution de l'équation

$$x''(t) - 4x'(t) + 13x(t) = 0$$

qui vérifie $x(0) = \sqrt{2}/2$ et $x'(0) = 5\sqrt{2}/2$ est définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad e^{2t}\sin(3t + \pi/4).$$

Quelle est la solution qui vérifie $x(0) = 1$ et $x'(0) = 5$?

III

Raccordements

12.1 Une fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) + x(t) = \sin t$$

si, et seulement si, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = Ke^{-t} + \frac{\sin t - \cos t}{2}.$$

12.2 On considère la fonction $b(t)$ définie par

$$\forall\, t \leqslant 0, \quad b(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, t \geqslant 0, \quad b(t) = \sin t.$$

1. Si une fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) + x(t) = b(t)$$

alors il existe deux constantes A et B réelles telles que

$$\forall\, t \leqslant 0, \quad x(t) = Ae^{-t}$$

et

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad x(t) = Be^{-t} + \frac{\sin t - \cos t}{2}.$$

2. La fonction x est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $A = B - 1/2$.
3. Il n'y a pas de solution de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (car la fonction b n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

13.1 Sur $I =]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, une fonction $x(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$tx'(t) + x(t) = 0$$

si, et seulement si, il existe une constante K telle que

$$\forall\, t \in I, \qquad x(t) = \frac{K}{t}.$$

13.2 L'équation $tx'(t) + x(t) = 1$ admet $[t \mapsto 1]$ pour seule solution sur $\mathbb{R}$.

13.3 L'application

$$\left[t \mapsto \frac{1-\cos t}{t} \right]$$

admet un prolongement f_0 de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
L'équation $tx'(t) + x(t) = \sin t$ admet f_0 pour seule solution sur $\mathbb{R}$.

IV

Changements de variable

14. On considère le changement de variable $u = \ell n\, t$.

14.1 La fonction $y(u)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad ay''(u) + by'(u) + cy(u) = f(u)$$

si, et seulement si, la fonction $x(t) = y(\ell n\, t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t > 0, \quad at^2x''(t) + (a+b)tx'(t) + cx(t) = f(\ell n\, t).$$

14.2 Avec $(a,b,c) = (1,2,1)$, l'équation

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) + 3tx'(t) + x(t) = f(\ell n\, t)$$

se ramène à

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad y''(u) + 2y'(u) + y(u) = f(u).$$

1. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = \frac{A + B\,\ell n\, t}{t}.$$

2. Avec $f(u) = u$, une solution particulière de l'équation complète

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) + 3tx'(t) + x(t) = \ell n\, t$$

est $x(t) = -2 + \ell n\, t$ (qui découle de $y(u) = u - 2$).

3. Avec $f(u) = e^u$, une solution particulière de l'équation complète

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) + 3tx'(t) + x(t) = t$$

est $x(t) = {}^t/_4$ (qui découle de $y(u) = {}^{e^u}/_4$).

14.3 Avec $(a,b,c) = (1,-5,6)$, l'équation

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) - 4tx'(t) + 6x(t) = f(\ell n\, t)$$

se ramène à

$$\forall\, u \in \mathbb{R}, \quad y''(u) - 5y'(u) + 6y(u) = f(u).$$

4. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = At^2 + Bt^3.$$

5. Avec $f(u) = 6u$, une solution particulière de l'équation complète

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) - 4tx'(t) + 6x(t) = 6\,\ell n\, t$$

est

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = \frac{5}{6} + \ell n\, t.$$

6. Avec $f(u) = 2e^u$, une solution particulière de l'équation complète

$$\forall\, t > 0, \quad t^2x''(t) - 4tx'(t) + 6x(t) = 2t$$

est $x(t) = t$.

15. On considère le changement de variable $u = t^2$.

15.1 La fonction $y(u)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, u > 0, \quad ay''(u) + by'(u) + cy(u) = f(u)$$

si, et seulement si, la fonction $x(t) = y(t^2)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t > 0, \quad atx''(t) + (2bt^2 - a)x'(t) + 4ct^3x(t) = 4t^3f(t^2).$$

15.2 Avec $(a,b,c) = (1,2,1)$, l'équation

$$tx''(t) + (4t^2 - 1)x'(t) + 4t^3x(t) = 0$$

devient

$$y''(u) + 2y'(u) + y(u) = 0.$$

La solution générale est donc

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = (A + Bt^2)e^{-t^2}.$$

15.3 Avec $(a,b,c) = (1,-5,6)$, l'équation

$$tx''(t) - (1 + 10t^2)x(t) + 24t^3x(t) = 0$$

devient

$$y''(u) - 5y'(u) + 6y(u) = 0.$$

La solution générale est donc

$$\forall\, t > 0, \quad x(t) = Ae^{-2t^2} + Be^{-3t^2}.$$

I

Inégalités

1. Soient f et g, deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un réel t_0 tel que $f(t_0) = g(t_0)$.

1. Développer $(a+b)^2 - (a-b)^2$.
2. On suppose que $f+g$ est constante. Démontrer que $f.g$ atteint son maximum en t_0.
3. On suppose que $f.g$ est constante. Démontrer que $f+g$ atteint son minimum en t_0.

2. Soient a et b, deux réels strictement positifs. Démontrer que

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

3. **Densité de $\mathbb{Q}$**
Soit $f : \mathbb{R}$, une fonction croissante telle que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$, puis $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
2. Démontrer par récurrence que $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $f(r) = rf(1)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
4. Démontrer que

$$\Big(x - \frac{1}{n}\Big)f(1) \leqslant f(x) \leqslant \Big(x + \frac{1}{n}\Big)f(1)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, et conclure.

4.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

5. Le triangle de sommets

$$A = (0,2), \quad B = (4,3) \quad \text{et} \quad C = (1,-1)$$

est caractérisé par le système suivant.

$$\begin{cases} x - 4y + 8 \geqslant 0 \\ 4x - 3y - 7 \leqslant 0 \\ 3x + y - 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

II

Partie entière

6. **Densité de $\mathbb{Q}$**
Soient $a < b$, deux réels.

6.1 On cherche deux entiers $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$a < \frac{n}{p} < b.$$

Si p est choisi tel que $p(b-a) > 1$, il suffit de choisir $n = \lfloor pb \rfloor$.

6.2 Si $]a, b[\subset \mathbb{Q}$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$]-\alpha, \alpha[\subset \mathbb{Q}$$

et donc $\mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

7.1 Comparer $\lfloor -x \rfloor$ et $-\lfloor x \rfloor$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

7.2 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que

$$x < n \leqslant y \iff \lfloor x \rfloor < n \leqslant \lfloor y \rfloor.$$

7.3 Comparer $\lfloor x+n \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor n \rfloor$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

7.4 Comparer $\lfloor x+y \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ pour $y \in \mathbb{R}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Condition nécessaire et suffisante sur $x \in \mathbb{R}$ pour que

$$\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor.$$

9. Soit $\tau \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_\tau(t) = \tau \left\lfloor \frac{t}{\tau} \right\rfloor.$$

Démontrer que

$$\forall\, s \leqslant t, \quad f_\tau(t) - f_\tau(s) \leqslant \tau + (t-s).$$

III

Borne supérieure

10. Soient $A \subset B$, deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\sup A \leqslant \sup B \quad \text{et} \quad \inf A \geqslant \inf B.$$

11. Soient A et B, deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. La partie

$$A - B = \big\{a - b,\ (a,b) \in A \times B\big\}$$

est bornée et

$$\sup(A-B) = \sup A - \inf B,$$
$$\inf(A-B) = \inf A - \sup B.$$

12. Soit $A \subset \mathbb{R}$, une partie non vide. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf_{a \in A} |x-a|.$$

12.1 Démontrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$\lim_{n\to+\infty} |x-u_n| = \mathrm{d}(x, A).$$

Cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Donner un exemple de partie A pour laquelle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge nécessairement.
Donner un exemple de partie A pour laquelle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas nécessairement.

12.2 Démontrer que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \big|\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(y,A)\big| \leqslant |x-y|.$$

13. Soient f et g, deux applications bornées de Ω dans $\mathbb{R}$. Démontrer que

$$\sup_{x\in\Omega} f(x) + g(x) \leqslant \sup_{x\in\Omega} f(x) + \sup_{x\in\Omega} g(x).$$

Étudier le cas d'égalité.

14. Fonctions monotones
Une fonction croissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ admet-elle une limite finie au voisinage de $+\infty$? au voisinage de 0 ?

IV

Suites

15. Suites réelles bornées
15.1 Exemple de suite réelle bornée n'admettant pas de plus grand terme.
15.2 Une suite réelle positive et de limite nulle admet un plus grand terme.
15.3 Que dire d'une suite croissante qui admet un plus grand terme ?

16. On considère une suite réelle bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \sup_{m \geqslant n} u_m \quad \text{et} \quad i_n = \inf_{m \geqslant n} u_n.$$

Démontrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Sont-elles convergentes ?

17. Si les trois suites extraites

$$(u_{3p+1})_{p\in\mathbb{N}}, \quad (u_{3p+2})_{p\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (u_{6p})_{p\in\mathbb{N}}$$

convergent vers 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers 0 ?

Suites réelles et complexes

1. On choisit $u_0 \in \mathbb{R}$ et on pose

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

Démontrer que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et que $u_n = \mathcal{O}(1/n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}.$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée.

3. Les suites de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad T_n = S_n + \frac{1}{n!}$$

sont adjacentes.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Les suites extraites de terme général S_{2p} et S_{2p+1} sont adjacentes.
2. La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente.

I

Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

5. **Suite de Fibonacci**
On pose $F_0 = F_1 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels qui tend vers $+\infty$.

II

Suites récurrentes

6. On pose $u_0 > 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ell\text{n}(1 + u_n).$$

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

7. On pose $u_0 = 1$.

7.1 On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? (Elle est constante !)

7.2 On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}.$$

Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

III

Suites complexes

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de nombres complexes non nuls qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. La suite de terme général $\operatorname{Arg} u_n$ converge-t-elle ?