Sur la formule du triangle de Pascal

La formule du triangle de Pascal s'énonce ainsi :

$$\forall\, 0 \leqslant p < n, \qquad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} \tag{1}$$

et il est bon de connaître un moyen visuel de retenir cette formule.

$$\begin{array}{cccccccc}
\binom{n-1}{0} & \cdots & & \cdots & \binom{n-1}{n-1} & & & \\
\binom{n}{0} & \cdots & \color{blue}{\binom{n}{p}} + \color{blue}{\binom{n}{p+1}} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} & & \\
 & & \parallel & & & & & \\
\binom{n+1}{0} & \cdots & \color{red}{\binom{n+1}{p+1}} & \cdots & \binom{n+1}{n} & \binom{n+1}{n+1} & & \\
\binom{n+2}{0} & \cdots & & \cdots & \cdots & \binom{n+2}{n+1} & \binom{n+2}{n+2} &
\end{array}$$

❧ On peut établir cette formule directement au moyen de l'expression des coefficients binomiaux à l'aide de factorielles.

❧ On peut aussi donner une démonstration combinatoire.

On doit choisir une partie X de $(p+1)$ éléments dans un ensemble E de $(n+1)$ éléments : il y a $\binom{n+1}{p+1}$ choix possibles.

Si décide de distinguer un élément x_0 de l'ensemble E des n autres éléments de cet ensemble, il y a deux possibilités :

— ou bien $x_0 \in X$, et dans ce cas, il reste à choisir une partie de p éléments parmi les n autres éléments de E, soit $\binom{n}{p}$ choix possibles ;

— ou bien $x_0 \notin X$, et dans ce cas, il reste à choisir une partie de $(p+1)$ éléments parmi les n autres éléments de E, soit $\binom{n}{p+1}$ choix possibles.

Ces deux cas s'excluent mutuellement et recouvrent toutes les possibilités de choix, on peut donc déduire la formule de Pascal de cette discussion.

Généralisation de la formule

La formule de Pascal généralisée est la suivante.

$$\forall\, 0 \leqslant m \leqslant n, \qquad \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \tag{2}$$

Évidemment, la visualisation de cette relation sur le triangle de Pascal prend un peu de place...

$$\begin{array}{ccc}
\binom{m}{m} & \overset{+}{\text{——}} & 0 \\
 & & \big|\, = \\
\binom{m+1}{m} & \overset{+}{\text{——}} & \binom{m+1}{m+1} \\
 & & \big|\, = \\
\binom{m+2}{m} & & \binom{m+2}{m+1} \\
\vdots & & \vdots \\
\binom{n-1}{m} & \overset{+}{\text{——}} & \binom{n-1}{m+1} \\
 & & \big|\, = \\
\binom{n}{m} & \overset{+}{\text{——}} & \binom{n}{m+1} \\
 & & \big|\, = \\
 & & \binom{n+1}{m+1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
\color{blue}{\binom{m}{m}} & \\
\big|\, + & \\
\color{blue}{\binom{m+1}{m}} & \\
\big|\, + & \\
\color{blue}{\binom{m+2}{m}} & \\
\vdots\ + & \\
\color{blue}{\binom{n-1}{m}} & \\
+\,\big| & \searrow^{=} \\
\color{blue}{\binom{n}{m}} & \color{red}{\binom{n}{m+1}} \\
 & \searrow^{=} \\
 & \color{red}{\binom{n+1}{m+1}}
\end{array}$$

❧ Ce schéma nous indique la démonstration par récurrence de cette formule généralisée.

Pour $n = m$, la formule généralisée se réduit en effet à

$$\binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}.$$

En supposant que cette formule soit établie pour un entier $n-1 \geqslant m$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} &= \left[\sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{m}\right] + \binom{n}{m} \\
&\overset{\mathrm{HR}}{=} \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}
\end{aligned}$$

et la preuve est complète.

❧ Il est possible d'en donner une version combinatoire.

En choisissant une partie X de $(m+1)$ éléments dans l'ensemble $E = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ de cardinal $(n+1)$, on distingue l'élément choisi x_{k_0} dont l'indice est le plus grand. Cet indice k_0 est évidemment inférieur ou égal à $(n+1)$, mais il est aussi supérieur ou égal à $(m+1)$ puisqu'il reste m autres éléments dans X dont l'indice est compris entre 1 (au sens large) et k_0 (au sens strict).

En notant $k = k_0 - 1$, on a donc un entier k tel que $m \leqslant k \leqslant n$ et il nous reste à choisir m éléments dans $\{x_1, \dots, x_k\}$ (puisque seuls les indices strictement inférieurs à k_0 restent permis), soit $\binom{k}{m}$ choix possibles.

Cette discussion présentent des cas mutuellement exclusifs qui recouvrent toutes les possibilités de choix, on peut en déduire la formule voulue.

Calculs d'espérance

❧ On peut déduire de la formule de Pascal généralisée une autre relation qui sert à calculer certaines espérances.

$$\forall\, 0 \leqslant m \leqslant n, \qquad \sum_{k=m}^{n} (k+1)\binom{k}{m} = (m+1)\binom{n+2}{m+2} \tag{3}$$

Démonstration — Comme $(k+1)\binom{k}{m} = (m+1)\binom{k+1}{m+1}$ pour tout $k \geqslant m$,

$$\sum_{k=m}^{n} (k+1)\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n} (m+1)\binom{k+1}{m+1} = (m+1)\sum_{k=m+1}^{n+1}\binom{k}{m+1} = (m+1)\binom{(n+1)+1}{(m+1)+1}$$

d'après la formule généralisée du triangle de Pascal.

❧ L'Astuce taupinale nous permet d'en déduire des sommes analogues, comme celle qui suit.

$$\sum_{k=m}^{n} k\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n} [(k+1)-1]\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n} (k+1)\binom{k}{m} - \sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = (m+1)\binom{n+2}{m+2} - \binom{n+1}{m+1}.$$

❧ On peut aussi calculer des variances en recourant aux polynômes factoriels.

$$\forall\, 0 \leqslant m \leqslant n, \qquad \sum_{k=m}^{n} (k+2)(k+1)\binom{k}{m} = (m+2)(m+1)\binom{n+3}{m+3} \tag{4}$$

La démonstration de cette relation reprend bien entendu celle de (3). Avec (2) et (3), on peut en déduire

$$\sum_{k=m}^{n} k^2\binom{k}{m}$$

et plus généralement une expression simplifiée de la somme

$$\sum_{k=m}^{n} P(k)\binom{k}{m}$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_2[X]$.