Permutation de variables aléatoires

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose que ces deux variables aléatoires ne prennent que des valeurs strictement positives et ont même loi. Peut-on en déduire que les variables aléatoires

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \qquad \text{et} \qquad Y_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2}$$

ont même loi ?

Cas de variables indépendantes

Notons $E \subset \mathbb{R}$, l'ensemble (fini ou dénombrable) des valeurs prises par les variables X_1 et X_2. Comme elles ont même loi, alors

$$\forall\, x \in E, \quad \mathbf{P}(X_1 = x) = \mathbf{P}(X_2 = x)$$

et comme elles sont indépendantes,

$$\forall\, (x, y) \in E \times E, \quad \mathbf{P}(X_1 = x, X_2 = y) = \mathbf{P}(X_1 = x)\,\mathbf{P}(X_2 = y) = \mathbf{P}(X_2 = x)\,\mathbf{P}(X_1 = y) = \mathbf{P}(X_1 = y, X_2 = x).$$

Autrement dit, les vecteurs aléatoires (X_1, X_2) et (X_2, X_1) à valeurs dans $E \times E$ ont même loi.

❧ Considérons maintenant une fonction $f : E \times E \to \mathbb{R}$ et notons F, l'image de f :

$$F = \big\{ f(x, y),\ (x, y) \in E \times E \big\}.$$

Les applications $Y_1 = f(X_1, X_2)$ et $Y_2 = f(X_2, X_1)$ sont des variables aléatoires à valeurs dans F et elles ont même loi. En effet,

$$\forall\, z \in F, \quad [Y_1 = z] = \bigsqcup_{\substack{(x,y)\in E\times E \\ \text{t.q. } f(x,y)=z}} [X_1 = x, X_2 = y] \quad \text{et} \quad [Y_2 = z] = \bigsqcup_{\substack{(x,y)\in E\times E \\ \text{t.q. } f(x,y)=z}} [X_2 = x, X_1 = y]$$

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit que

$$\forall\, z \in F, \quad \mathbf{P}(Y_1 = z) = \sum_{\substack{(x,y)\in E\times E \\ \text{t.q. } f(x,y)=z}} \mathbf{P}(X_1 = x, X_2 = y) = \sum_{\substack{(x,y)\in E\times E \\ \text{t.q. } f(x,y)=z}} \mathbf{P}(X_2 = x, X_1 = y) = \mathbf{P}(Y_2 = z).$$

Cas de variables non indépendantes

Si on choisit $X_1 = X_2$, ces deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, mais il est encore vrai que les vecteurs aléatoires (X_1, X_2) et (X_2, X_1) ont même loi — ils sont même égaux en tant qu'applications de Ω dans $E \times E$!

Ce n'est donc pas une bonne idée pour trouver un contre-exemple, c'est-à-dire un couple (X_1, X_2) de variables aléatoires de même loi qui n'ait pas la même loi que le couple (X_2, X_1).

❧ Si on considère des variables aléatoires X_1 et X_2 à valeurs dans un ensemble $E = \{\alpha, \beta\}$ de cardinal 2, on ne peut pas trouver de contre-exemple.

En effet, la loi du couple est alors résumé par le tableau suivant.

	$[X_2 = \alpha]$	$[X_2 = \beta]$	
$[X_1 = \alpha]$	a	b	p
$[X_1 = \beta]$	c	d	$1 - p$
	p	$1 - p$	

Dans ce tableau figure un paramètre $0 < p < 1$ et quatre inconnues a, b, c, d qui sont des réels positifs dont la somme est égale à 1. En imposant que les variables aléatoires X_1 et X_2 aient même loi, il faut en particulier que

$$\mathbf{P}(X_1 = \alpha) = a + b = a + c = \mathbf{P}(X_2 = \alpha)$$

et donc que $b = c$: le tableau est alors symétrique et par conséquent le couple (X_2, X_1) a nécessairement même loi que le couple (X_1, X_2).

Caramba, encore raté !

❧ Considérons maintenant deux variables aléatoires X_1 et X_2 à valeurs dans $E = \{1, 2, 3\}$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant.

	$[X_2 = 1]$	$[X_2 = 2]$	$[X_2 = 3]$
$[X_1 = 1]$	$1/9$	$2/9$	0
$[X_1 = 2]$	0	$1/9$	$2/9$
$[X_1 = 3]$	$2/9$	0	$1/9$

En sommant les probabilités ligne par ligne et colonne par colonne, on constate que X_1 et X_2 suivent toutes les deux la loi uniforme sur E :

$$\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{3}.$$

Cela dit, ce tableau n'est pas symétrique, donc les deux couples (X_1, X_2) et (X_2, X_1) ne suivent pas la même loi.

Il reste à vérifier que les deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 ne suivent pas la même loi : c'est bien le cas (la vérification est assez fastidieuse).

Lois de Y_1 et Y_2							
z	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$2/3$	$2/5$	$3/4$	$3/5$
$\mathbf{P}(Y_1 = z)$	$1/3$	$2/9$	0	0	$2/9$	$2/9$	0
$\mathbf{P}(Y_2 = z)$	$1/3$	0	$2/9$	$2/9$	0	0	$2/9$

On peut alors vérifier que

$$\mathbf{E}(Y_1) = \frac{67}{135} < \frac{68}{135} = \mathbf{E}(Y_2).$$