RMS 2022 [1131]

Soient E, un espace vectoriel de dimension trois, et (e_1, e_2, e_3), une base de E. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'endomorphisme f_a de E en posant

$$f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3 \quad \textit{et} \quad f_a(e_2) = 0_E.$$

1❧ *Donner une base de l'image et une base du noyau de f_a.*
2❧ *Écrire la matrice A de f_a relative à la base (e_1, e_2, e_3).*
3❧ *Calculer A^2. Qu'en déduire ?*
4❧ *Quelles sont les valeurs propres de f_a ? Cet endomorphisme est-il inversible ? diagonalisable ?*

1❧ Par définition, le noyau de f_a contient les vecteurs $e_1 - e_3$ et e_2. Comme la famille (e_1, e_2, e_3) est libre, les vecteurs

$$\varepsilon_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

sont linéairement indépendants, donc $\dim \operatorname{Ker} f_a \geqslant 2$.

Par ailleurs, le vecteur

$$\varepsilon_3 = f_a(e_1) = a \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 - a \cdot e_3 = a \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2$$

n'est pas nul (en tant que combinaison linéaire d'une famille libre dont les coefficients ne sont pas tous nuls) et appartient à l'image de f_a. Donc le rang de f_a est au moins égal à 1.

D'après le Théorème du rang,

$$\operatorname{Ker} f_a = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f_a = \mathbb{C} \cdot (a \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

2❧ La matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3) est égale à

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

La matrice de f_a dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1)$ est égale à

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la formule du changement de base, ces deux matrices sont semblables.

3❧ Il est clair que $(A')^2 = 0_3$. Comme A et A' sont semblables, $A^2 = 0_3$.

✍ *On pouvait aussi remarquer que $\operatorname{Im} f_a \subset \operatorname{Ker} f_a$ pour conclure encore plus vite.*

La matrice A est donc nilpotente. Comme elle n'est pas nulle, elle est donc nilpotente d'indice 2 : son polynôme minimal est égal à X^2 et son polynôme caractéristique à X^3.

4❧ Puisque A est nilpotente, son spectre est égal à $\{0\}$. Cette matrice n'est donc pas inversible.

Si elle était diagonalisable, alors elle serait semblable à la matrice nulle et donc en fait *égale* à la matrice nulle. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.