RMS 2022 [1143]

1❧ *Soient* A, B *et* C *dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. *On suppose que* $C \neq 0_n$ *et que* $AC = CB$. *Démontrer que*

$$\forall\, P \in \mathbb{C}[X], \quad P(A).C = C.P(B).$$

2❧ *Démontrer qu'un produit de matrices est inversible si, et seulement si, tous ses facteurs sont inversibles. En déduire que* A *et* B *ont au moins une valeur propre commune.*

3❧ *Réciproquement, on suppose que* A *et* B *ont une valeur propre commune. Démontrer qu'il existe une matrice* C *non nulle telle que* $AC = CB$.

1❧ Il est clair que $A^0C = C = CB^0$ et, par hypothèse, $A^1C = CB^1$.
S'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $A^kC = CB^k$, alors

$$A^{k+1}C = A.A^kC \overset{\text{HR}}{=} A.CB^k = AC.B^k = CB.B^k = C.B^{k+1}.$$

On a ainsi démontré par récurrence que $A^kC = CB^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par combinaison linéaire, on en déduit que $P(A).C = C.P(B)$ pour tout polynôme P.

2❧ Quelles que soient les matrices $M_1, \dots, M_r$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(M_1 \cdots M_r) = \prod_{k=1}^{r} \det M_k \in \mathbb{C}.$$

Un produit de complexes est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul et le produit de matrices $M_1 \cdots M_r$ est inversible si, et seulement si, son déterminant n'est pas nul. Par conséquent, le produit $M_1 \cdots M_r$ est inversible si, et seulement si, $\det M_k \neq 0$ pour tout k, c'est-à-dire si toutes les matrices M_k sont inversibles.

❧ Supposons que le spectre de A et le spectre de B soient des parties disjointes de $\mathbb{C}$ et notons P, le polynôme caractéristique de B. En tant qu'élément de $\mathbb{C}[X]$, ce polynôme P est scindé :

$$P = \prod_{k=1}^{r} (X - \mu_k)^{m_k}.$$

Comme $P(B) = 0_n$ (Théorème de Cayley-Hamilton), on déduit de ce qui précède que

$$P(A).C = C.P(B) = 0_n$$

alors que la matrice

$$P(A) = (A - \mu_1)^{m_1} \times \cdots \times (A - \mu_r)^{m_r}$$

est inversible en tant que produit de matrices inversibles (les valeurs propres μ_k de B ne sont pas des valeurs propres de A !). On en déduit que $C = 0_n$, ce qui est impossible par hypothèse.

On a démontré par l'absurde que les matrices A et B admettaient une valeur propre commune.

3❧ Considérons une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ commune aux matrices A et B. Par définition, ni la matrice $(A - \lambda I_n)$, ni la matrice $(B - \lambda I_n)$ ne sont inversibles.

D'après le Théorème du rang, la dimension de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ est au moins égale à 1 et la dimension de $\operatorname{Im}(B - \lambda I_n)$ est au plus égale à $(n-1)$. Par conséquent, il existe une matrice $C \neq 0_n$ telle que

$$\operatorname{Im}(B - \lambda I_n) \subset \operatorname{Ker} C \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} C \subset \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

✍ *Si* $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ *est une famille libre de cardinal* $r < n$, *on peut la compléter en une base* $(\varepsilon_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *de* E.

Si $(u_1, \dots, u_q)$ *est une famille libre de cardinal* $q \geqslant 1$*, alors il existe un endomorphisme* φ *de* E *tel que*

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant r, \quad \varphi(\varepsilon_k) = 0_E \quad \textit{et} \quad \forall\, r < k \leqslant n, \quad \varphi(\varepsilon_k) = u_1.$$

Il est clair que $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$ *et que* $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{C} \cdot u_1 \subset \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_q)$ *; en particulier,* φ *n'est pas l'endomorphisme nul.*

On en déduit que $C.(B - \lambda I_n) = 0_n = (A - \lambda I_n).C$ et donc, après développement et simplification, que $CB = AC$.