RMS 2022 [1108]

On considère $(p+1)$ urnes numérotées de 0 à p. L'urne i contient i boules blanches et $(p-i)$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on effectue n tirages successifs avec remise dans cette urne. On note N_p, le nombre de boules blanches obtenues.

1❧ *Quelle est la loi de N_p ?*

2❧ *Calculer l'espérance de N_p.*

3❧ *Calculer la limite de $\mathbf{P}(N_p = j)$ lorsque p tend vers $+\infty$.*

Avant de faire le moindre calcul, il convient de définir le modèle probabiliste qui va représenter l'expérience aléatoire étudiée.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel sont définies une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[\![0, p]\!]$ et une variable aléatoire $N_p : \Omega \to [\![0, n]\!]$ telle que

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant p,\ \forall\, 0 \leqslant j \leqslant n, \quad \mathbf{P}(N_p = j \mid U = i) = \binom{n}{m}\left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j}.$$

La variable U représente le choix de l'urne et le conditionnement par l'événement $[U = i]$ signifie qu'on a choisi l'urne i. La proportion de boules blanches dans cette urne est égale à i/p et, comme d'habitude, le nombre de succès en n tirages successifs avec remise dans cette urne est alors modélisé par la loi binomiale $\mathscr{B}(n, i/p)$.

1❧ Les valeurs possibles pour N_p sont les entiers $0 \leqslant j \leqslant n$.
Soit $0 \leqslant j \leqslant p$. Il est clair que

$$[N_p = j] = \bigsqcup_{i=0}^{p} [N_p = j, U = i]$$

donc, par σ-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(N_p = j) = \sum_{i=0}^{p} \mathbf{P}(N_p = j \mid U = i)\, \mathbf{P}(U = i)$$

et, sous les hypothèses que nous venons de faire,

$$\mathbf{P}(N_p = j) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} \binom{n}{j}\left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j}.$$

2❧ Comme la variable aléatoire N_p ne prend qu'un nombre fini de valeurs, c'est une variable aléatoire d'espérance finie et, par définition,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(N_p) &= \sum_{j=0}^{n} j\, \mathbf{P}(N_p = j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{j}{p+1} \sum_{i=0}^{p} \binom{n}{j}\left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j} \\
&= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j}\left(\frac{i}{p}\right)^j \left(1 - \frac{i}{p}\right)^{n-j} \\
&= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} n \cdot \frac{i}{p} \qquad (\star) \\
&= \frac{n}{p(p+1)} \cdot \frac{p(p+1)}{2} = \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

On aura reconnu en $(\star)$ l'expression de l'espérance pour la loi $\mathscr{B}(n, i/p)$ et on sait que l'espérance de la loi $\mathscr{B}(n, x)$ est égale à nx.

✍ *Le calcul ci-dessus est en fait un cas particulier très simple de la* ***Formule de l'espérance totale*** *: si* N *est une variable aléatoire d'espérance finie et si* $U : \Omega \to \mathbb{N}$ *est une variable aléatoire, alors pour tout* $j \in \mathbb{N}$, N *est une variable aléatoire d'espérance finie pour* $\mathbf{P}_{[U=j]}$ *et*

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbf{E}(N|U=j)\cdot\mathbf{P}(U=j).$$

✍ *Par ailleurs, le résultat trouvé n'est pas surprenant : dans le modèle adopté, les boules blanches et les boules noires jouent des rôles symétriques. On en déduit que le nombre moyen de boules blanches est égal au nombre moyen de boules noires. Comme le nombre total de boules tirées est égal à* n*, le nombre moyen de boules blanches tirées doit être égal à* $n/2$.

$\boxed{3}$❧ La fonction $\left[t \mapsto t^j(1-t)^{n-j}\right]$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc la somme de Riemann

$$\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{i}{p}\right)^j\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-j}$$

converge vers

$$\int_0^1 t^j(1-t)^{n-j}\,dt$$

lorsque p tend vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\lim_{p\to+\infty}\mathbf{P}(N_p=j) = \binom{n}{j}\int_0^1 t^j(1-t)^{n-j}\,dt.$$

❧ Par intégrations par parties successives,

$$\forall\, i\in\mathbb{N},\ \forall\, j\in\mathbb{N},\quad \int_0^1 t^i(1-t)^j\,dt = \frac{i!j!}{(i+j+1)!}$$

donc

$$\forall\, 0\leqslant j\leqslant n,\quad \lim_{p\to+\infty}\mathbf{P}(N_p=j) = \frac{1}{n+1}.$$

✍ *Ainsi, si le nombre d'urnes est très grand, la loi de* N_p *tend à devenir la loi uniforme sur* $[\![0,n]\!]$.