RMS 2022 [1212]

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A.A^\top.A = I_n$.

$\boxed{\textbf{1}}$ *Démontrer que* A *est inversible.*

$\boxed{\textbf{2}}$ *Démontrer que* A *est symétrique.*

$\boxed{\textbf{3}}$ *En déduire que* $A = I_n$.

$\boxed{\textbf{1}}$ Par hypothèse, $A.(A^\top.A) = I_n$. Comme A et $(A^\top.A)$ sont des matrices carrées de même taille, on en déduit (Théorème du rang) que A est inversible et que son inverse est la matrice $A^\top.A$.

✍ *La relation* $(A.A^\top).A = I_n$ *nous dit aussi que* $A^{-1} = A.A^\top$ *et donc que les matrices* A *et* $A^\top$ *commutent.*

$\boxed{\textbf{2}}$ Puisque A est inversible et que $A^{-1} = A^\top.A$, la matrice A^{-1} est symétrique. Par conséquent, la matrice A est elle aussi symétrique.

$\boxed{\textbf{3}}$ D'après l'hypothèse de l'énoncé et la symétrie de A, $A^3 = I_n$, donc A admet

$$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$$

comme polynôme annulateur. On sait que les valeurs propres de A figurent nécessairement parmi les racines de ce polynôme.

Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont *réelles*. Donc le spectre de A est réduit à $\{1\}$ (la seule racine réelle du polynôme annulateur) et comme A est diagonalisable, on en déduit que A est semblable à I_n et donc $A = I_n$.