RMS 2022 [1133]

Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C}).$$

On suppose que $a + c = b + d = 1$.

1❧ *Démontrer que : si*

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

alors $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.

2❧ *Démontrer que $(1, -1)$ est un vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?*

3❧ *Soit V, un vecteur propre non colinéaire à $(1, -1)$, alors V est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.*

1❧ L'hypothèse faite sur A peut se traduire matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{U}.$$

Par conséquent, si $AX = Y$, alors

$$UY = U(AX) = (UA)X = UX$$

c'est-à-dire : $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

2❧ D'après la question précédente,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

avec $y_1 + y_2 = 1 - 1 = 0$, donc

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = y_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cela prouve que le vecteur (**non nul !**) $(1, -1)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre y_1. D'après les coefficients de A, la valeur propre y_1 est aussi égale à $(a - b)$.

3❧ Si $V = (x_1, x_2)$ est un vecteur propre de A, alors

$$AV = \lambda \cdot V,$$

donc $x_1 + x_2 = \lambda \cdot (x_1 + x_2)$. Si V n'est pas colinéaire à $(1, -1)$, alors $x_1 + x_2 \neq 0$ et par conséquent $\lambda = 1$.

✍ *La trace de A est égale à $a + d = a + (1 - b) = (a - b) + 1$: c'est bien la somme des deux valeurs propres qu'on a trouvées.*