RMS 2022 [1141]

Soit $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M^\top = I_n$.

1❧ *Démontrer que, si P est un polynôme annulateur de M, toute valeur propre de M est racine de P.*

2❧ *Dans cette question seulement, on suppose que M est symétrique. Démontrer que M est diagonalisable, puis que $\operatorname{tr} M$ et $\det M$ sont différents de 0.*

3❧ *Démontrer que M est diagonalisable.*

4❧ *Démontrer que M est inversible si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de M.*

1❧ Si $MX = \lambda X$, alors $M^k X = \lambda^k X$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (par récurrence à partir de $k = 1$) et, par combinaison linéaire, $P(M)X = P(\lambda).X$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si P est un polynôme annulateur, alors $P(\lambda).X = 0$ et si λ est une valeur propre, alors on peut choisir $X \neq 0$ (qui est alors un vecteur propre de M associé à λ) et en déduire que $P(\lambda) = 0$.

2❧ Si M est symétrique, alors l'équation devient $M^2 + M - I_n = 0_n$. Dans ce cas, la matrice M admet $P_2 = X^2 + X - 1$ pour polynôme annulateur. Comme $\Delta = 5 \neq 0$, ce polynôme est scindé à racines simples et comme la matrice M admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est diagonalisable.

✍ *Comme M est une matrice à coefficients* complexes, *il est hors de question d'appliquer le Théorème spectral pour conclure.*

❧ Comme 0 n'est pas une racine du polynôme annulateur $X^2 + X - 1$, ce n'est pas non plus une valeur propre de M, donc la matrice M est inversible et son déterminant n'est pas nul.

❧ Comme M est diagonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité. D'après le polynôme annulateur, il y a au plus deux valeurs propres, de multiplicités respectives $m \in \mathbb{N}$ et $(n - m) \in \mathbb{N}$. Donc

$$\operatorname{tr} M = m \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + (n - m) \cdot \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{-n}{2} + \frac{(2n - m)\sqrt{5}}{2}.$$

Si la trace de M était nulle, alors on aurait

$$\sqrt{5} = \frac{n}{2n - m} \in \mathbb{Q},$$

ce qui est faux. Donc $\operatorname{tr} M \neq 0$.

3❧ D'après l'équation, $M^\top = I_n - M^2$. En transposant l'équation,

$$I_n = M + (M^\top)^2 = M + (I_n - M^2)^2$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0_n &= (I_n - M^2)^2 - (I_n - M) \\ &= (I_n - M)\big[(I_n - M)(I_n + M)^2 - I_n\big] \\ &= (I_n - M)M(I_n - M - M^2). \end{aligned}$$

La matrice M admet donc $P_4 = (1-X)X(X^2+X-1)$ pour polynôme annulateur. Ce polynôme est scindé à racines simples :

$$1, \quad 0, \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

donc la matrice M est diagonalisable.

$\boxed{4}$❧ D'après l'équation,

$$M^\top = (I_n - M)(I_n + M).$$

On sait que M est inversible si, et seulement si, $M^\top$ est inversible.

Comme -1 n'est pas une valeur propre de M (ce n'est pas une racine de P_4), on en déduit que $(I_n + M)$ est inversible. Par conséquent, $M^\top$ est inversible si, et seulement si, $(I_n - M)$ est inversible.

Autrement dit : M est inversible si, et seulement si, $1 \notin \mathrm{Sp}(M)$.

✍ *L'alternative est donc la suivante : ou bien*

$$\mathrm{Sp}(M) \subset \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\},$$

ou bien

$$\{0, 1\} \subset \mathrm{Sp}(M) \subset \left\{0,\ 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$$