RMS 2022 [1164]

On cherche les applications f *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant la propriété suivante :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}. \tag{$\star$}$$

$\boxed{\textbf{1}}$ ❧ *On suppose que* f *vérifie* ($\star$).
❦ *En considérant des valeurs particulières de* n, *démontrer que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\qquad f'(x) = f'(x+1).$$

❦ *Démontrer que l'intégrale*

$$H(x) = \int_x^{x+1} f'(t)\,dt$$

ne dépend pas de x, *puis que* f' *est constante.*
$\boxed{\textbf{2}}$ ❧ *Déterminer les solutions de l'équation* ($\star$).

$\boxed{\textbf{1}}$ ❧ On applique la relation ($\star$) pour x avec 1 et $(n+1)$; pour $(x+1)$ avec n :

$$f'(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = \frac{f(x+n+1) - f(x)}{n+1},$$
$$f'(x+1) = \frac{f(x+1+n) - f(x)}{n}$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned} nf'(x+1) = f(x+n+1) - f(x) &= f(x+n+1) - f(x+1) + f(x+1) - f(x) \\ &= (n+1)f'(x) - f'(x) = nf'(x) \end{aligned}$$

et donc que $f'(x+1) = f'(x)$: la dérivée f' est donc périodique, de période 1.
❧ Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, on a $H(x) = f(x+1) - f(x)$ et donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad H'(x) = f'(x+1) - f'(x) = 0.$$

La fonction H est donc constante sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.
En appliquant ($\star$) avec $n = 1$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = f(x+1) - f(x) = H(x) = C^{\text{te}}$$

ce qui prouve que la fonction est nécessairement affine.
$\boxed{\textbf{2}}$ ❧ Réciproquement, quelle que soit la fonction affine $f(x) = ax + b$,

$$f'(x) = a = \frac{[a(x+n) + b] - [ax + b]}{n} = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}.$$