RMS 2022 [1198]

> *Soient*
> $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
> **1❧** *Calculer les racines réelles des polynômes* $X^3 - 2X + 1$ *et* $X^3 - 2X - 4$.
> **2❧** *Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice* D.
> **3❧** *Résoudre l'équation* $M^3 - 2M = D$*, d'inconnue* $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
> **4❧** *Résoudre l'équation* $M^3 - 2M = A$*, d'inconnue* $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

1❧ Le polynôme $X^3 - 2X + 1$ admet 1 pour racine évidente. On en déduit que
$$X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1) = (X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$$
où $\{\alpha, \beta\} = \{(-1 \pm \sqrt{5})/2\}$.

Le polynôme $X^3 - 2X - 4$ admet 2 pour racine évidente. On en déduit que
$$X^3 - 2X - 4 = (X-2)(X^2 + 2X + 2)$$
et $X^2 + 2X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

2❧ Considérons une base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ représenté par la matrice D dans cette base $\mathscr{B}$.

Comme D est diagonale, les vecteurs de $\mathscr{B}$ sont des vecteurs propres de u, associés aux valeurs propres -1 et 4. Les sous-espaces propres de u sont donc des *droites* vectorielles.

❧ Si un endomorphisme v commute à u, alors tout sous-espace propre de u est aussi stable par v. Par conséquent, les droites $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_1$ et $\mathbb{R} \cdot \varepsilon_2$ sont stables par v, ce qui signifie que les vecteurs ε_1 et ε_2 sont aussi des vecteurs propres pour v.

Ainsi, si v commute à u, alors $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ est diagonale.

❧ Réciproquement, si la matrice $\mathfrak{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ est diagonale, alors elle commute à D (deux matrices diagonales commutent toujours) et par conséquent les endomorphismes u et v commutent.

En conclusion, les matrices qui commutent à D sont exactement les matrices diagonales.

✍ *Plus généralement, si* $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ *est une matrice diagonale admettant* n *valeurs propres deux à deux distinctes, les matrices qui commutent à* D *sont les matrices diagonales. (Même démonstration !)*

3❧ Si $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifie $M^3 - 2M = D$, alors M et D commutent (puisque toute matrice M commute à tout polynôme en M) et d'après la question précédente, M est une matrice diagonale :
$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$
L'équation $M^3 - 2M = D$ devient alors
$$\begin{pmatrix} a^3 - 2a & 0 \\ 0 & b^2 - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
D'après la première question, il y a trois possibilités pour a : 1, α et β et une seule pour b : 2. Les solutions sont donc
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4❧ La matrice A est triangulaire, donc ses coefficients diagonaux : -1 et 4 sont ses valeurs propres. En tant que matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ ayant deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et semblable à la matrice D : il existe donc une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D$.

La conjugaison étant un morphisme d'algèbres,

$$\begin{aligned} M^3 - 2M = A &\iff P^{-1}M^3P - 2P^{-1}MP = P^{-1}AP \\ &\iff (P^{-1}MP)^3 - 2(P^{-1}MP) = D. \end{aligned}$$

On est donc ramené à l'équation précédente.

❧ Il est clair que la matrice

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

convient (ses colonnes sont des vecteurs propres de A associés respectivement à -1 et à 4). Par conséquent, les solutions de $M^3 - 2M = A$ sont les matrices

$$P_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_0^{-1}, \quad P_0 \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_0^{-1}, \quad P_0 \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P_0^{-1}.$$