RMS 2022 [1185]

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant toutes les deux la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & 1 \\ 0 & X_2(\omega) \end{pmatrix}.$$

On cherche à calculer la probabilité pour que M soit diagonalisable.

1❧ *En développant de deux manières le polynôme $(1+X)^{2n}$, démontrer l'identité de Vandermonde :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2❧ *Conclure.*

1❧ D'après la formule du binôme,

$$(1+X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = \big[(1+X)^n\big]^2 = \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right]^2.$$

Il est plus simple d'écrire un polynôme comme une somme infinie dont le terme général est nul à partir d'un certain rang pour appliquer la formule du produit de Cauchy :

$$\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right]^2 = \left[\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k\right]^2$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k X^k \quad \text{avec} \quad b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i}.$$

En particulier, pour $k = n$, on a $0 \leqslant k - i \leqslant n$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant k$ et donc

$$\forall\, 0 \leqslant i \leqslant n, \quad a_i = \binom{k}{i} \quad \text{et} \quad a_{k-i} = \binom{k}{k-i} = \binom{k}{i}$$

(par symétrie des coefficients binomiaux).

Par unicité de la décomposition d'un polynôme dans la base canonique,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$

2❧ La matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux :

— ou bien $x_1 \neq x_2$, et la matrice est diagonalisable (comme toute matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ admettant deux valeurs propres distinctes) ;

— ou bien $x_1 = x_2$, et la matrice n'est pas diagonalisable (puisque le sous-espace propre associé à la valeur propre *double* x_1 est la *droite* $\mathbb{R} \cdot (1, 0)$).

Il s'agit donc de calculer la probabilité de l'événement $[X_1 = X_2]$.

En décomposant cet événement sur le système complet $\big([X_1 = k]\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$,

$$[X_1 = X_2] = \bigsqcup_{k=0}^{n} [X_1 = k, X_1 = X_2] = \bigsqcup_{k=0}^{n} [X_1 = k, X_2 = k].$$

Par σ-additivité de $\mathbf{P}$ et par indépendance des variables aléatoires,

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X_1 = k)\,\mathbf{P}(X_2 = k) = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}\right]^2$$

donc

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) = \frac{1}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}.$$

✍ *D'après la formule de Stirling,*

$$\mathbf{P}(X_1 = X_2) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Il est logique que cette probabilité tende vers 0 *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *: les deux variables aléatoires sont indépendantes et prennent des valeurs de plus en plus nombreuses, il est donc de plus en plus rare qu'elles prennent la même valeur en même temps.*