RMS 2022 [1206]

On considère la suite de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et

$$\forall\, k \geqslant 2, \qquad P_k = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1❧ *Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*
2❧ *Démontrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_n' = P_{n-1}(X-1).$$

En déduire que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad P_n^{(k)} = P_{n-k}(X-k).$$

3❧ *Démontrer que l'application Φ_n définie par*

$$\forall\, Q \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \Phi_n(Q) = Q - Q'(X+1)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
❦ *Exprimer les polynômes $\Phi_n(P_k)$ en fonction de $P_0, \ldots, P_n$.*
❦ *Démontrer que Φ_n possède une unique valeur propre. Déterminer l'espace propre associé. L'endomorphisme Φ_n est-il diagonalisable ?*
4❧ *Démontrer que Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $\Phi_n^{-1}(P_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.*

1❧ Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, le degré du polynôme P_k est égal à k, donc la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (échelonnée en degré).
2❧ Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
P_n' &= \frac{(X-n)^{n-1}}{n!} + \frac{(n-1)X(X-n)^{n-2}}{n!} \\
&= \frac{(X-n)^{n-2}}{n!} \cdot \big[(X-n) + (n-1)X\big] \\
&= \frac{(X-1)\big((X-1)-(n-1)\big)^{(n-1)-1}}{(n-1)!} = P_{n-1}(X-1).
\end{aligned}$$

On suppose que $P_n^{(k)} = P_{n-k}(X-k)$ pour un entier $1 \leqslant k < n$ (c'est vrai pour $k = 1$ comme on vient de le constater). Alors

$$\begin{aligned}
P_n^{(k+1)} = (P_n^{(k)})' &\overset{\text{HR}}{=} \big(P_{n-k}(X-k)\big)' \\
&= P_{n-k}'(X-k) \\
&= P_{(n-k)-1}\big((X-k)-1\big) && \text{(calcul précédent)} \\
&= P_{n-(k+1)}\big(X-(k+1)\big),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que notre hypothèse de récurrence est vraie pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
3❧ Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\deg Q'(X+1) = \deg Q' \leqslant \deg Q \leqslant n$$

et comme Φ_n est évidemment linéaire, l'application Φ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

❧ Il est clair que $\Phi_n(P_0) = P_0$ et que $\Phi_n(P_1) = X - 1 = P_1 - P_0$.
D'après la question précédente, pour $2 \leqslant k \leqslant n$,

$$\Phi_n(P_k) = P_k - P_k'(X+1) = P_k - P_{k-1}.$$

❧ La matrice de Φ_n relative à la base $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Par conséquent, Φ_n admet 1 comme seule valeur propre et il est clair sur la matrice que le sous-espace propre associé à 1 est la droite $\mathbb{R}\cdot P_0$ des polynômes constants.

✍ *On peut aussi constater que l'équation $\Phi_n(P) = P$ se traduit par $-P'(X+1) = 0$ et donc $P' = 0$.*

$\boxed{4❧}$ Comme 0 n'est pas valeur propre, Φ_n est inversible : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

❧ Il est clair que $\Phi_n^{-1}(P_0) = P_0$. D'autre part, comme

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \Phi_n(P_k) = P_k - P_{k-1}$$

et que, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$P_k = P_0 + \sum_{i=1}^{k}(P_i - P_{i-1}) = \Phi_n(P_0) + \sum_{i=1}^{k}\Phi_n(P_i) = \Phi_n\Big(\sum_{i=0}^{k} P_i\Big),$$

alors

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \Phi_n^{-1}(P_k) = \sum_{i=0}^{k} P_i.$$

✍ *Cette expression est correcte également pour $k = 0$.*