RMS 2022 [1028]

Soit $A : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, une application de classe $\mathscr{C}^1$. (Pour alléger les notations, on notera A_t au lieu de $A(t)$.)

1❧ *On suppose qu'il existe une application $S : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1}A_tS_t = A_0.$$

Démontrer qu'il existe une application continue $B : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad A_t' = B_tA_t - A_tB_t.$$

2❧ *Réciproquement, on suppose qu'il existe une application continue $B : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad A_t' = B_tA_t - A_tB_t.$$

Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $A(t)$ est semblable à $A(0)$.

1❧ On part de l'hypothèse habilement réécrite :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad A_tS_t = S_tA_0$$

et on dérive en appliquant la formule de Leibniz :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad A_t'S_t + A_tS_t' = S_t'A_0.$$

Comme la matrice S_t est inversible, on en déduit que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad A_t' = B_tA_t - A_tB_t \quad \text{avec} \quad B_t = S_t'S_t^{-1}.$$

❧ Comme S est de classe $\mathscr{C}^1$, l'application $[t \mapsto S_t']$ est continue et comme $S_t \in GL_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $\left[t \mapsto S_t^{-1}\right]$ est de classe $\mathscr{C}^1$. (Inutile de se fatiguer à calculer la dérivée !)

2❧ Réciproquement, on s'appuie sur le calcul précédent pour deviner ce que vaut S_t. On a en effet démontré que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S_t' = B_tS_t.$$

Autrement dit, S est une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre : rien de plus simple à résoudre !

❧ Comme $[t \mapsto B_t]$ est continue, elle admet une primitive $[t \mapsto C_t]$ (de classe $\mathscr{C}^1$...) telle que $C_0 = 0_n$ et on pose

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S_t = \exp C_t.$$

On a ainsi défini une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$S_0 = \exp 0_n = I_n$$

et on sait que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S_t' = C_t'(\exp C_t) = (\exp C_t)C_t' = B_tS_t = S_tB_t.$$

On sait aussi que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1} = \exp(-C_t)$$

et donc que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d[S_t^{-1}]}{dt} = -C_t'.\exp(-C_t) = -B_t.\exp(-C_t) = -\exp(-C_t).B_t.$$

❧ On considère maintenant l'application $F : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = S_t^{-1}A_tS_t = \exp(-C_t).A_t.\exp(C_t).$$

En particulier,
$$F(0) = I_n^{-1} A_0 I_n = A_0.$$
En tant que produit de trois applications de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ et on calcule sa dérivée : pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}
F'(t) &= -\big[\exp(-C_t).B_t\big].A_t.\exp(C_t) \\
&\quad + \exp(-C_t).A_t'.\exp(C_t) \\
&\quad + \exp(-C_t).A_t.\big[B_t.\exp(C_t)\big] \\
&= \exp(-C_t).\big(A_t.B_t - B_t.A_t + A_t'\big).\exp(C_t) \\
&= O_n
\end{aligned}$$
par hypothèse sur B_t.

La fonction F est donc constante :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad S_t^{-1}.A_t.S_t = F(0) = A_0.$$