RMS 2022 [1109]

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$*, une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$*. On suppose que ces variables suivent toutes la loi géométrique* $\mathscr{G}(p)$ *de paramètre* $0 < p < 1$ *et on note, comme d'habitude,* $q = 1 - p$*.*
Pour tout $\omega \in \Omega$*, on pose*

$$C(\omega) = \max\{n \in \mathbb{N}^* \;:\; X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant X_n(\omega)\}.$$

1❧ *Pour* $k \in \mathbb{N}^*$*, calculer* $\mathbf{P}(X_1 \geqslant k)$*,* $\mathbf{P}(X_2 \geqslant X_1,\ X_1 = k)$ *et* $\mathbf{P}(C \geqslant 2)$*.*
2❧ *Écrire une fonction* `geomCr(q)` *qui renvoie une réalisation de la variable aléatoire* C*.*
3❧ *Écrire une fonction* `nbGeomCr(q)` *qui renvoie la moyenne de* C *calculée sur 1 000 réalisations.*
En admettant que C *soit une variable aléatoire de variance finie, justifier que cette fonction donne une valeur approchée acceptable de* $\mathbf{E}(C)$*.*
4❧ *Tracer* `nbGeomCr(q)` *en fonction de* $0 < q < 1$*. Que peut-on conjecturer sur les limites de* $\mathbf{E}(C)$ *lorsque* q *tend vers 0 ou vers 1 ?*
5❧ *Démontrer que*

$$\mathbf{P}(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k) = \frac{(1-q)^n q^{n(k-1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$*.*
6❧ *Calculer* $\mathbf{E}(C)$ *en fonction de* q*.*
7❧ *Démontrer les propriétés conjecturées plus haut.*

✍ *En toute rigueur,* C *est une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *puisque*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \qquad [C \geqslant k] \in \mathcal{A}$$

(en convenant que $\max \mathbb{N} = +\infty \geqslant k$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*).*
Le calcul de la loi de C *permet de vérifier que* C *est néanmoins presque sûrement finie :*

$$\mathbf{P}(C \in \mathbb{N}) = \mathbf{P}\Big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} [C \geqslant k]\Big) = \lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(C \geqslant k)$$

par continuité décroissante.

1❧ En décomposant sur le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_1,

$$[X_1 \geqslant k] = \bigsqcup_{i\geqslant k} [X_1 = i]$$

et par σ-additivité de $\mathbf{P}$,

$$\mathbf{P}(X_1 \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} pq^{i-1} = q^{k-1}.$$

❧ Il est clair que

$$[X_2 \geqslant X_1, X_1 = k] = [X_2 \geqslant k] \cap [X_1 = k]$$

et comme X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2 \geqslant X_1, X_1 = k) &= \mathbf{P}(X_2 \geqslant k)\,\mathbf{P}(X_1 = k) = \mathbf{P}(X_1 \geqslant k)\,\mathbf{P}(X_1 = k)\\ &= q^{k-1}.p.q^{k-1}\\ &= p.q^{2(k-1)}.\end{aligned}$$

❧ Avec la convention précisée plus haut,

$$[C \geqslant 2] = [X_2 \geqslant X_1] = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}^*} [X_2 \geqslant X_1, X_1 = k] \in \mathcal{A}$$

donc

$$\mathbf{P}(C \geqslant 2) = \sum_{k=1}^{+\infty} p.q^{2(k-1)} = \frac{p}{1-q^2} = \frac{1}{1+q}.$$

2❧ La documentation officielle de Python nous suggère fortement de commencer ainsi.

```
from numpy.random import default_rng as generateur

def G(p):
    return generateur().geometric(p)
```

Ensuite, il reste à effectuer des simulations successives jusqu'à ce qu'on tombe sur une valeur plus petite que la valeur précédente.

```
def geomCr(q):
    p = 1-q
    ref, C, valeur = G(p), 1, G(p)
    while valeur>=ref:
        ref, C, valeur = valeur, C+1, G(p)
    return C
```

✍ *C'est ici qu'il est important de savoir que C est finie presque sûrement...*

3❧ Il s'agit simplement de calculer une moyenne sur 1 000 termes.

```
def nbGeomCr(q):
    S = 0
    for n in range(1000):
        S += geomCr(q)
    return S/1000
```

❧ Si C est une variable aléatoire de variance finie, alors on peut appliquer la Loi des grands nombres : si $(C_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que C, alors la moyenne

$$\frac{C_1 + \cdots + C_n}{n}$$

converge en probabilité vers $\mathbf{E}(C)$ — au sens où

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} - \mathbf{E}(C)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

C'est en ce sens que la valeur renvoyée par la fonction `nbGeomCr(q)` (avec $n = 10^3$) est une approximation convenable de $\mathbf{E}(C)$.

✍ *On a énoncé la Loi des grands nombres telle qu'elle figure au programme. Sous les mêmes hypothèses (et même sous des hypothèses plus faibles), la moyenne empirique converge vers $\mathbf{E}(C)$ presque sûrement :*

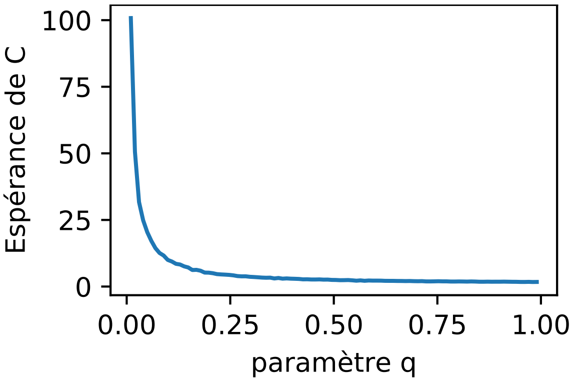
$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{C_1 + \cdots + C_n}{n} = \mathbf{E}(C)\right) = 1.$$

4❧ Le code est bien connu.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

Q  = np.linspace(0.01, 0.99, 100)
EC = [ nbGeomCr(q) for q in Q ]
plt.plot(Q, EC)
plt.xlabel("paramètre q")
plt.ylabel("Espérance de C")
```

Et le résultat est le suivant.



On peut conjecturer que $\mathbf{E}(C)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de 0 et vers une limite positive au voisinage de 1.

✍ Une variable aléatoire géométrique de paramètre p modélise le temps d'attente du premier succès lors d'expériences indépendantes ayant une probabilité p de réussir — et donc une probabilité q d'échouer.

❧ Lorsque q tend vers 0, chaque expérience a une très forte probabilité de réussir. Autrement dit, les variables aléatoires X_n sont très souvent égales à 1 (= réussite du premier coup). On comprend ainsi que C peut alors prendre de grandes valeurs.

❧ Inversement, lorsque q tend vers 1, chaque expérience a une faible probabilité de réussir et dans ces conditions les variables aléatoires X_n peuvent prendre des valeurs assez grandes, donc relativement variées et comme elles sont indépendantes, il est très peu probable qu'elles prennent des valeurs croissantes. On comprend que, cette fois, C est très souvent égale à 1 et que l'espérance de C ne soit guère plus grande que 1.

5❧ Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$,

$$[X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k] \in \mathcal{A}.$$

En décomposant cet événement sur le système complet associé à X_1,

$$\begin{aligned}[X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k] &= \bigsqcup_{\ell \in \mathbb{N}^*} [X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k] \cap [X_1 = \ell] \\ &= \bigsqcup_{\ell \geqslant k} [X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell] \cap [X_1 = \ell].\end{aligned}$$

Par σ-additivité, on en déduit que

$$\mathbf{P}(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \mathbf{P}\big([X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell] \cap [X_1 = \ell]\big).$$

Comme $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, on déduit du lemme des coalitions que les événements

$$[X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell] \quad \text{et} \quad [X_1 = \ell]$$

sont indépendants, donc

$$\mathbf{P}\big([X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell] \cap [X_1 = \ell]\big) = \mathbf{P}(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell)\, \mathbf{P}(X_1 = \ell).$$

De plus, comme $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi, les vecteurs aléatoires

$$(X_1, \dots, X_{n-1}) \quad \text{et} \quad (X_2, \dots, X_n)$$

ont même loi et par conséquent

$$\mathbf{P}(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_2 \geqslant \ell) = \mathbf{P}(X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant \ell).$$

On a ainsi démontré que

$$\mathbf{P}(X_n \geqslant X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k) = \sum_{\ell=k}^{+\infty} \mathbf{P}(X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant \ell)\,\mathbf{P}(X_1 = \ell)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geqslant 2$.

❧ En reprenant les calculs menés plus haut, on montre que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_2 \geqslant X_1 \geqslant k) = \frac{pq^{2(k-1)}}{1-q^2} = \frac{(1-q)^2 q^{2(k-1)}}{(1-q)(1-q^2)}$$

et cela valide la formule de l'énoncé pour $n = 2$.

En supposant que

$$\mathbf{P}(X_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant \ell) = \frac{(1-q)^{n-1} q^{(n-1)(\ell-1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-1})}$$

pour **un** entier $n \geqslant 2$ et pour **tout** $\ell \in \mathbb{N}^*$, on déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k) &= \sum_{\ell=k}^{+\infty} \frac{(1-q)^{n-1} q^{(n-1)(\ell-1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-1})} \cdot pq^{\ell-1} \\ &= \frac{(1-q)^n q^{n(k-1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{n-1})(1-q^n)}\end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: le résultat est démontré par récurrence.

✍ *Remercions le sujet de cette précieuse indication : le calcul par récurrence de*

$$\mathbf{P}(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant k)$$

est plus facile que le calcul direct de

$$\mathbf{P}(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1) = \mathbf{P}(X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant 1).$$

Par définition de C,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad [C \geqslant n] = [X_n \geqslant \cdots \geqslant X_1 \geqslant 1] \in \mathcal{A},$$

ce qui prouve enfin *que* C *est bien une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

On peut aussi déduire du calcul précédent que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \mathbf{P}(C \geqslant n+1) = \frac{1-q}{1-q^{n+1}} \cdot \mathbf{P}(C \geqslant n) \leqslant \frac{1}{1+q} \cdot \mathbf{P}(C \geqslant n)$$

et donc que

$$\mathbf{P}(C \geqslant n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\frac{1}{(1+q)^n}\Big).$$

Cela confirme ce qu'on avait annoncé : $\mathbf{P}(C = +\infty) = 0$ *et on peut donc, à une partie négligeable près de* Ω*, considérer que* C *est une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$.

6❧ "On sait bien" qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum \mathbf{P}(C \geqslant n)$ est convergente et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(C \geqslant n).$$

La remarque précédente prouve donc que C est une variable aléatoire d'espérance finie et que

$$\mathbf{E}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-q^n)}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}.$$

$\boxed{7❧}$ Commençons par démontrer que C est une variable aléatoire de variance finie. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(C = n) = \mathbf{P}(C \geqslant n) - \mathbf{P}(C \geqslant n+1)$$

et, d'après la remarque faite plus haut,

$$0 \leqslant \mathbf{P}(C = n) = \frac{q(1-q^n)}{1-q^{n+1}} \cdot \mathbf{P}(C \geqslant n) \leqslant q\,\mathbf{P}(C \geqslant n).$$

Par conséquent,

$$\mathbf{P}(C = n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\Big[\Big(\frac{q}{1+q}\Big)^n\Big]$$

et cette estimation prouve que C admet des moments de tout ordre : quel que soit l'entier $d \geqslant 1$, la série $\sum n^d\,\mathbf{P}(C = n)$ est (absolument) convergente.

On a ainsi validé *a posteriori* l'application de la Loi des grands nombres.

❧ Il reste à étudier les limites de $\mathbf{E}(C)$ lorsque q tend vers 0 ou vers 1. Pour cela, on pose $u_1(q) = 1$ et

$$\begin{aligned} u_n(q) &= \frac{(1-q)^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} \\ &= \frac{1}{(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1})} \end{aligned}$$

pour tout $n \geqslant 2$ et tout $0 < q < 1$.

❧ Comme chaque fonction u_n est positive et décroissante, la fonction

$$[q \mapsto \mathbf{E}(C)]$$

est elle aussi positive et décroissante. Elle admet donc une limite, finie ou infinie, lorsque q tend vers 0 et

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \lim_{q\to 0} \mathbf{E}(C) \geqslant \lim_{q\to 0} \sum_{k=1}^{n} u_n(q) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{q\to 0} u_n(q) = n.$$

Cela prouve que $\mathbf{E}(C)$ tend effectivement vers $+\infty$ lorsque q tend vers 0.

❧ Sur la deuxième expression de $u_n(q)$, il est clair que

$$\forall\, n \geqslant 2,\ \forall\, q \geqslant \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant u_n(q) \leqslant u_n(1/2)$$

et comme la série $\sum u_n(1/2)$ converge, on a démontré que la série $\sum u_n$ convergeait normalement sur $[1/2, 1[$. Par conséquent,

$$\lim_{q\to 1} \mathbf{E}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{q\to 1} u_n(q) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e - 1 \approx 1,7.$$