RMS 2022 [1181]

Une urne contient n tickets, dont p sont gagnants. Un joueur tire p tickets.
1❧ *On suppose que le joueur effectue des tirages* avec *remise. Le nombre de tickets gagnants est alors modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(p, p/n)$ (nombre de succès lors de p expériences indépendantes, avec probabilité de succès égale à p/n à chaque fois).*
❦ *Calculer la probabilite $P(n, p)$ de tirer au moins un ticket gagnant.*
❦ *Calculer la limite de $P(p^2, p)$ lorsque p tend vers $+\infty$.*
2❧ *On suppose que le joueur effectue des tirages* sans *remise ; que les tickets sont indiscernables (hormis le fait d'être gagnant ou perdant) et que tous les résultats possibles sont équiprobables.*
❦ *Combien y a-t-il de résultats possibles ?*
❦ *Quelle est la proportion $Q(n, p)$ de résultats qui comptent au moins un ticket gagnant ?*
❦ *Quelle est la limite de $Q(p^2, p)$ lorsque p tend vers $+\infty$?*
3❧ *On suppose encore que le joueur effectue des tirages* sans *remise, mais on suppose cette fois que les tickets soient tous numérotés (et donc tous discernables). Proposer un modèle probabiliste.*

1❧ La probabilité de tirer au moins un ticket gagnant est égale à $\mathbf{P}(X \geqslant 1)$, c'est-à-dire à
$$P(n, p) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right)^p.$$

❧ On sait alors bien que
$$\lim_{p \to +\infty} P(p^2, p) = \lim_{p \to +\infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^p = 1 - e^{-1}.$$

2❧ Il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir p tickets parmi n tickets deux à deux distincts (par définition du coefficient binomial).
❧ Comme il y a p tickets gagnants,
— ou bien $2p > n$, et chaque tirage contient au moins un ticket gagnant ;
— ou bien $2p \leqslant n$, et il y a $\binom{n-p}{p}$ manières de choisir les p tickets tirés de l'urne parmi les $(n - p)$ tickets perdants.

Avec la convention habituelle,
$$Q(n, p) = 1 - \frac{\binom{n-p}{p}}{\binom{n}{p}}.$$

❧ Avec $n = p^2$,
$$Q(n, p) = 1 - \frac{(p^2 - p)!}{(p^2)!} \cdot \frac{(p^2 - p)!}{(p^2 - 2p)!}.$$

Avec la formule de Stirling,
$$\frac{(p^2 - p)!}{(p^2)!} \cdot \frac{(p^2 - p)!}{(p^2 - 2p)!} \underset{p \to +\infty}{\sim} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{2p^2 - 2p} \left(1 - \frac{2}{p}\right)^{2p - p^2}$$

et par conséquent
$$\lim_{p \to +\infty} Q(p^2, p) = 1 - e^{-1}.$$

3❧ Si les tickets sont tous discernables, il s'agit de compter le nombre de p-listes constituées à partir de n éléments : il y a donc
$$\frac{n!}{(n - p)!}$$
cas possibles. Parmi ces cas possibles, on exclut les p-listes formées à partir des $(n - p)$ tickets perdants :

— si $2p > n$, chaque liste contient au moins un ticket gagnant ;
— si $2p \leqslant n$, il faut éliminer $\frac{(n-p)!}{(n-2p)!}$ listes.

L'hypothèse d'équiprobabilité nous conduit alors à

$$Q(n,p) = 1 - \frac{[(n-p)!]^2}{n!(n-2p)!}$$

c'est-à-dire au même résultat que dans le modèle précédent.