RMS 2022 [1180]

Une urne contient N boules : il y a $1 \leqslant r \leqslant N$ boules blanches et $(N - r)$ boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'on ait tiré les r boules blanches : on note X, le nombre aléatoire de tirages effectués.
Autrement dit, on considère l'ensemble E des N-listes constituées de r fois le chiffre 1 et de $(N - r)$ fois le chiffre 0. Cet ensemble est muni de la loi uniforme et, pour chaque N-liste $\omega \in E$, on pose

$$X(\omega) = \max\{1 \leqslant k \leqslant N \ : \ \omega_k = 1\}.$$

L'ensemble E est muni de la tribu discrète $\mathscr{E} = \mathfrak{P}(E)$, si bien que X est une variable aléatoire sur $(E, \mathscr{E})$.
1❧ *Quel est le cardinal de E ?*
2❧ *Calculer la probabilité $\mathbf{P}(X = k)$.*
Que dire de la loi de X pour $r = 1$? pour $r = N$?
3❧ *Démontrer que*

$$\mathbf{E}(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}.$$

1❧ Chaque N-liste $\omega \in E$ est caractérisée par les positions occupées par les r chiffres 1. Il y a donc $\binom{N}{r}$ éléments dans E.
2❧ Une N-liste $\omega \in E$ appartient à l'événement $[X = k]$ si, et seulement si, $\omega_k = 1$ et $\omega_\ell = 0$ pour tout $k < \ell \leqslant N$. Autrement dit, il faut répartir les $(r-1)$ premiers chiffres 1 parmi les $(k - 1)$ premiers termes de la liste.

- Si $k < r$, c'est impossible.
- Si $r \leqslant k \leqslant N$, il y a $\binom{k-1}{r-1}$ listes possibles et par hypothèse d'équiprobabilité,

$$\forall\, r \leqslant k \leqslant N, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

❧ Pour $r = 1$, la loi de X est uniforme sur $[\![1, N]\!]$:

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant N, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{N}.$$

❧ Pour $r = N$, la variable X est constante, égale à N : $\mathbf{P}(X = N) = 1$.

3❧ Comme X est une variable aléatoire bornée (elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs), c'est une variable aléatoire d'espérance finie.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) = \sum_{k=r}^{N} k\,\mathbf{P}(X = k) &= \sum_{k=r}^{N} k \cdot \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} \\
&= \sum_{k=r}^{N} r \cdot \frac{\binom{k}{r}}{\binom{N}{r}} \\
&= \frac{r}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r} = \frac{r}{\binom{N}{r}} \cdot \binom{N+1}{r+1}
\end{aligned}$$

d'après la formule (généralisée) du triangle de Pascal. Après simplification, on trouve :

$$\mathbf{E}(X) = r \cdot \frac{N+1}{r+1}.$$

✍ *Il est facile de vérifier que cette formule est correcte pour $r = 1$ et pour $r = N$.*