RMS 2022 [1128]

> **1❧** *Soit* u*, un endomorphisme de* $\mathbb{R}^{2n}$ *tel que* $u^2 = 0$ *et* $\operatorname{rg} u = n$.
> ❦ *Démontrer que* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$.
> ❦ *En déduire qu'il existe une base de* $\mathbb{R}^{2n}$ *dans laquelle la matrice de* u *est égale à*
>
> $$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$
>
> **2❧** *Soit* u*, un endomorphisme de* $\mathbb{R}^{3n}$ *tel que* $u^3 = 0$ *et* $\operatorname{rg} u = 2n$.
> ❦ *Démontrer que* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u^2$.
> ❦ *En déduire qu'il existe une base de* $\mathbb{R}^{3n}$ *dans laquelle la matrice de* u *est égale à*
>
> $$\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

1❧ Comme u est un endomorphisme d'un espace de dimension finie égale à $2n$, on déduit du théorème du rang que

$$\dim \operatorname{Ker} u = 2n - \operatorname{rg} u = n. \tag{1}$$

Par ailleurs, comme $u^2 = 0$, on a aussi

$$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u. \tag{2}$$

On a établi une inclusion et l'égalité des dimensions (finies !), donc les deux sous-espaces sont égaux :

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u. \tag{3}$$

❧ Comme la dimension de $\operatorname{Im} u$ est égale à n, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\operatorname{Im} u$ et, par définition de l'image, il existe une famille $(e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ de vecteurs tels que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad e_k = u(e_{n+k}).$$

Vérifions la famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ est bien une base de $\mathbb{R}^{2n}$: pour des raisons de dimension, il suffit de prouver que $\mathscr{B}$ est une famille libre. Si les scalaires λ_k ($1 \leqslant k \leqslant 2n$) sont tels que

$$\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = 0, \tag{4}$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u(e_{n+k}) + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = 0.$$

Par linéarité de u et comme $u^2 = 0$,

$$0 = \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k \cdot u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} \cdot e_k.$$

Par construction, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est *libre*, donc les scalaires λ_{n+1}, …, λ_{2n} sont tous nuls. Il ne reste de (4) que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda \cdot e_k = 0.$$

À nouveau, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, donc les scalaires λ_1, …, λ_n sont tous nuls : on a prouvé que $\mathscr{B}$ était une famille et (donc) une base de $\mathbb{R}^{2n}$.

❧ Comme $u^2 = 0$,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad u(e_k) = u^2(e_{n+k}) = 0.$$

D'autre part, par définition de la famille $\mathscr{B}$,

$$\forall\, n+1 \leqslant k \leqslant 2n, \quad u(e_{n+k}) = e_k.$$

Donc la matrice de u relative à cette base $\mathscr{B}$ est bien la matrice voulue.

2❧ D'après le Théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} u = \dim \mathbb{R}^{3n} - \operatorname{rg} u = 3n - 2n = n. \tag{5}$$

Comme $u^3 = u \circ u^2 = 0$, il est clair que

$$\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Ker} u \tag{6}$$

et en particulier

$$\operatorname{rg} u^2 \leqslant \dim \operatorname{Ker} u = n. \tag{7}$$

Comme $\operatorname{Ker} u$ est un espace de dimension n (5) contenu dans $\operatorname{Ker} u^2$, il existe une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\operatorname{Ker} u$ et on peut compléter cette base pour obtenir une base de $\operatorname{Ker} u^2$:

$$\operatorname{Vect}(\underbrace{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}_{\text{base de } \operatorname{Ker} u}, \varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r) = \operatorname{Ker} u^2. \tag{8}$$

On en déduit que

$$\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Vect}(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r) = \operatorname{Ker} u^2. \tag{9}$$

La famille $\big(u(\varepsilon_{n+1}), \dots, u(\varepsilon_r)\big)$ est libre : en effet, si

$$\sum_{k=n+1}^{r} \lambda_k \cdot u(\varepsilon_k) = 0,$$

alors

$$u\Big(\sum_{k=n+1}^{r} \lambda_k \cdot \varepsilon_k\Big) = 0.$$

Dans ces conditions, la combinaison linéaire

$$\sum_{k=n+1}^{r} \lambda_k \cdot \varepsilon_k$$

appartient à la fois à $\operatorname{Ker} u$ et à $\operatorname{Vect}(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r)$, alors que ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. Par conséquent, cette combinaison linéaire est nulle et comme la famille $(\varepsilon_{n+1}, \dots, \varepsilon_r)$ est libre, on en déduit que les scalaires $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_r$ sont tous nuls.

Comme $u^2 = 0$, la famille $\big(u(\varepsilon_{n+1}), \dots, u(\varepsilon_r)\big)$ est une famille libre de $(r-n)$ vecteurs dans $\operatorname{Ker} u$. Comme $\dim \operatorname{Ker} u = n$ par (5), on en déduit que $(r-n) \leqslant n$, c'est-à-dire

$$\dim \operatorname{Ker} u^2 = r \leqslant 2n. \tag{10}$$

D'après le Théorème du rang,

$$\operatorname{rg} u^2 = \dim \mathbb{R}^{3n} - \dim \operatorname{Ker} u^2 \geqslant 3n - 2n = n \tag{11}$$

et d'après (7) et (5), on a donc

$$\operatorname{rg} u^2 = n = \dim \operatorname{Ker} u. \tag{12}$$

Avec l'inclusion (6) et l'égalité des dimensions, on a prouvé que

$$\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Ker} u.$$

❧ Considérons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\operatorname{Im} u^2$. Il existe donc une famille $(e_{2n+1}, \ldots, e_{3n})$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad e_k = u^2(e_{2n+k})$$

et on pose

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad e_{n+k} = u(e_{2n+k}).$$

On vient de définir une famille

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &= (e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n}, e_{2n+1}, \ldots, e_{3n}) \\ &= \big(u^2(e_{2n+1}), \ldots, u^2(e_{3n}), u(e_{2n+1}), \ldots, u(e_{3n}), e_{2n+1}, \ldots, e_{3n}\big).\end{aligned}$$

Il suffit bien entendu de vérifier que cette famille est libre pour démontrer que c'est une base de $\mathbb{R}^{3n}$. Considérons donc une relation de liaison :

$$0 = \sum_{k=1}^{3n} \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u^2(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} \cdot u(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{2n+k} \cdot e_{2n+k}$$

et appliquons u^2 : comme $u^3 = 0$, il reste seulement

$$0 = \sum_{k=2n+1}^{3n} \lambda_k \cdot u^2(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{2n+k} \cdot e_k$$

et comme la sous-famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre par construction, on en déduit que $\lambda_{2n+1} = \cdots = \lambda_{3n} = 0$. Il reste alors

$$0 = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k \cdot e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u^2(e_{2n+k}) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} \cdot u(e_{2n+k})$$

et on applique u. Comme $u^3 = 0$,

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} \cdot u^2(e_{2n+k}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n+k} \cdot e_k.$$

On obtient, comme précédemment, ainsi que $\lambda_{n+1} = \cdots = \lambda_{2n} = 0$. Il reste donc seulement

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k = 0$$

d'où on déduit enfin que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

❧ Comme $u(e_1) = u^3(e_{2n+1}) = 0, \ldots, u(e_n) = u^3(e_{3n}) = 0$ et comme, par construction même,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad u(e_{n+k}) = e_k \quad \text{et} \quad u(e_{2n+k}) = e_{n+k},$$

la matrice de u dans cette base a exactement la forme voulue.