RMS 2022 [1191]

1❧ *Développer*

$$f(t) = \frac{t}{2-t^2}$$

en série entière. Préciser le rayon de convergence.

2❧ *Donner la loi d'une variable aléatoire* X *dont la fonction génératrice est* f.

3❧ *Calculer l'espérance de* X.

4❧ *Déterminer la loi de la variable aléatoire* $Y = \frac{1}{2} \cdot X$.

1❧ Pour $|{}^{t^2}\!/_2| < 1$,

$$\frac{t}{2-t^2} = \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{1-(t^2/2)} = \frac{t}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{t^2}{2}\Big)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{2^{n+1}}$$

et pour $|{}^{t^2}\!/_2| > 1$, la série (géométrique) est grossièrement divergente.

Par conséquent, le rayon de convergence est égal à ${}^1\!/\!\sqrt{2}$.

2❧ Comme le rayon de convergence est strictement positif, on peut identifier terme à terme. Puisque

$$\forall\, t \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k)t^k = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}t^{2n+1},$$

alors

- si k est pair, alors $\mathbf{P}(X=k) = 0$ — autrement dit, X est une variable aléatoire dont les valeurs sont presque sûrement des entiers impairs ;
- si k est impair, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2n+1$ et

$$\mathbf{P}(X=k) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

3❧ Comme le rayon de convergence de la série génératrice est *strictement* supérieur à 1, la variable aléatoire X admet des moments de tout ordre. En particulier,

$$\mathbf{E}(X) = f'(1).$$

Or

$$\forall\, t \in [0, {}^1\!/\!\sqrt{2}], \quad f'(t) = \frac{1}{2-t^2} + \frac{2t^2}{2-t^2}$$

et donc $f'(1) = 3$.

4❧ Comme les valeurs de X sont des entiers impairs, Y est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des demi-entiers :

$$Y : \Omega \to E = \Big\{\frac{2n+1}{2},\ n \in \mathbb{N}\Big\}$$

et comme

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \Big[Y = \frac{2n+1}{2}\Big] = [X = 2n+1],$$

alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}\Big(Y = \frac{2n+1}{2}\Big) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$