RMS 2022 [1160]

> *Déterminer la nature de la série*
> $$\sum \ell n\Big(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\Big).$$

Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{n}\cdot\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-1/2} = \frac{1}{n}\cdot\Big[1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] = \frac{1}{n}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

En notant u_n le terme général de la série, on en déduit que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Par conséquent, la série $\sum u_n$ est la somme de la série convergente

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

(Critère spécial des séries alternées) et d'une série absolument convergente (puisque son terme général est dominée par $1/n^2$, qui est le terme général d'une série absolument convergente).

La série $\sum u_n$ est donc convergente.