RMS 2022 [1186]

Pour $0 < p < 1$ *et* $q = 1 - p$*, on pose*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = p^2 k(1-p)^{k-1}.$$

1❧ *Vérifier que* $(p_k)_{k\geqslant 1}$ *définit une loi de probabilité sur* $\mathbb{N}^*$*.*

2❧ *Soit* X*, une variable aléatoire telle que*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = k) = p_k.$$

Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\mathbf{E}(X-1)$ *et de* $\mathbf{E}\big[(X-1)(X-2)\big]$*.*

3❧ *En déduire l'existence et la valeur de* $\mathbf{E}(X)$ *et de* $\mathbf{V}(X)$*.*

❧ Commençons par présenter tous les résultats sur les séries entières dont nous aurons besoin dans la suite pour calculer l'espérance et la variance de cette **loi de Pascal**.

On sait que le rayon de convergence de la série (géométrique) $\sum x^k$ est égal à 1 et que

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \tag{1}$$

Par conséquent, on peut dériver terme à terme autant qu'on veut :

$$\forall\, 0 \leqslant x < 1, \qquad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} \tag{2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} \tag{3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)x^{k-3}. \tag{4}$$

1❧ La famille $(p_k)_{k\geqslant 1}$ est une famille de réels positifs. D'après les séries entières rappelées ci-dessus (2), c'est aussi une famille sommable, dont la somme est égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p^2 f'(q) = \frac{p^2}{(1-q)^2} = 1$$

donc c'est bien une loi de probabilité.

2❧ D'après la formule de transfert, la variable aléatoire $X-1$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum (k-1)p_k$ est absolument convergente. D'après (3), c'est bien le cas et

$$\mathbf{E}(X-1) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)p_k = p^2 q f''(q) = \frac{2p^2 q}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p}.$$

❧ De même, comme la série $\sum (k-1)(k-2)p_k$ converge absolument (4), la variable $(X-1)(X-2)$ est d'espérance finie et

$$\mathbf{E}\big[(X-1)(X-2)\big] = \sum_{k=3}^{+\infty} (k-1)(k-2)p_k = p^2 q^2 f^{(3)}(q) = \frac{6q^2}{p^2}.$$

3❧ Il est clair que $X = (X-1)+1$, donc X est une variable aléatoire d'espérance finie (en tant que somme de variables aléatoires d'espérance finie) et, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X-1) + 1 = \frac{2q}{p} + 1 = \frac{1+q}{p}.$$

De même, $X^2 = (X-1)(X-2) + 3X - 2$, donc X est une variable aléatoire de carré intégrable (puisque son carré est une somme de variables aléatoires d'espérance finie) et, à nouveau par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}[(X-1)(X-2)] + 3\,\mathbf{E}(X) - 2 = \frac{p^2-6p+6}{p^2}.$$

On en déduit que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - [\mathbf{E}(X)]^2 = \frac{2q}{p^2}.$$

✍ *On pouvait aussi calculer la fonction génératrice de la variable aléatoire X :*

$$G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 k q^{k-1} t^k = p^2 t \sum_{k=1}^{+\infty} k(qt)^{k-1} = p^2 t f'(qt) = \frac{p^2 t}{(1-qt)^2}. \tag{5}$$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à $1/q > 1$, donc X admet des moments de tout ordre et

$$\mathbf{E}(X) = G'(1) = \frac{1+q}{p}, \qquad \mathbf{E}[X(X-1)] = G''(1) = \frac{4q}{p} + \frac{6q^2}{p^2}$$

ce qui permet de retrouver (plus rapidement, à mon goût) la variance de X.