RMS 2022 [1157]

1❧ *Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation*

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$$

admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$. Cette solution sera notée a_n.

2❧ *Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $1/2$.*

3❧ *Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.*

1❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une application $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ en posant

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k.$$

En tant que application polynomiale, f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le segment $[0,1]$. En tant que somme de fonctions strictement croissantes sur $[0,1]$, elle est aussi strictement croissante sur $[0,1]$.

D'après le Théorème de la bijection monotone, l'application f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)] = [0,n]$. Comme $1 \in [0,n]$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet donc une, et une seule, solution a_n dans le segment $[0,1]$.

REMARQUE.— On sait même que $0 < a_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ (puisque $f_n(0) < 1 = f_n(a_n)$) et que $a_n < 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$ (puisque $f_n(a_n) = 1 < n = f_n(1)$).

2❧ Par définition,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(a_n) = 1 = f_{n+1}(a_{n+1}).$$

Or, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(a_n) = f_n(a_n) + a_n^{n+1} > f_n(a_n) = 1$$

et par conséquent

$$f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1}).$$

Comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n > a_{n+1}$$

et donc que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(1/2) = \sum_{k=1}^{n} (1/2)^k < \sum_{k=1}^{+\infty} (1/2)^k = 1 = f_n(a_n)$$

et comme f_n est croissante, on en déduit que $1/2 < a_n$.

✍ *Puisque la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est définie implicitement (son terme général est la solution d'une équation, on ne connaît pas directement sa valeur exacte), il faut l'étudier implicitement, c'est-à-dire manœuvrer l'équation — et pas seulement sa solution.*

3❧ En tant que suite décroissante et minorée par $1/2$, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et tend vers une limite ℓ telle que

$$\forall\, n \geqslant 1, \qquad \frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant a_n.$$

Comme chaque fonction f_n est strictement croissante, on en déduit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(1/2) \leqslant f_n(\ell) \leqslant f_n(a_n) = 1.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(1/2)} \leqslant \frac{\ell}{1-\ell} \leqslant 1.$$

Ainsi, $\frac{\ell}{1-\ell} = 1$ et donc $\ell = 1/2$.