RMS 2022 [1152]

Soient $C \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *et*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -C^\top \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1❧ *Calculer* $M^\top.M$. *En déduire que* M *est inversible.*

2❧ *Démontrer que la matrice* $M^{-1}M^\top$ *est orthogonale.*

1❧ D'après les règles du produit matriciel par blocs,

$$M^\top.M = \begin{pmatrix} 1 + C^\top.C & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & I_n + C.C^\top \end{pmatrix}.$$

De plus, $C^\top.C = \|C\|^2 \geqslant 0$ (pour le produit scalaire canonique sur les matrices colonnes), donc $1 + C^\top.C > 0$.

Par ailleurs, si la colonne X appartient au noyau de $(I_n + C.C^\top)$, alors

$$0 = X^\top.(I_n + C.C^\top)X = X^\top.X + (C^\top.X)^2 \geqslant \|X\|^2 \geqslant 0$$

donc $X = 0$. La matrice carré $(I_n + C.C^\top)$ est donc injective et par conséquent inversible.

Comme $M^\top.M$ est diagonale par blocs et que les blocs diagonaux sont inversibles, la matrice $M^\top.M$ est inversible.

2❧ On vérifie que $M.M^\top = M^\top.M$ (ça n'a rien d'évident *a priori*, il est nécessaire de poser le calcul). Par conséquent, en posant $Q = M^{-1}.M^\top$,

$$\begin{aligned} Q.Q^\top &= (M^{-1}.M^\top).\big[M.(M^{-1})^\top\big] \\ &= M^{-1}.M.M^\top.(M^{-1})^\top \\ &= I_n \end{aligned}$$

puisque $(M^{-1})^\top = (M^\top)^{-1}$ (pour toute matrice inversible).

Ce calcul prouve que la matrice Q est orthogonale.