RMS 2022 [1132]

Soit φ, l'application définie par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \psi(P) = P + P'.$$

1❧ *Démontrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.*
2❧ *La matrice M_φ qui représente ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle inversible ?*
3❧ *Cette matrice est-elle diagonalisable ?*

1❧ Il est clair que ψ est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. De plus,

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \deg P' \leqslant \deg P$$

donc

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg \psi(P) \leqslant \max\{\deg P, \deg P'\} \leqslant \deg P \leqslant n$$

donc $\psi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$: l'application ψ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2❧ Il est clair que $\psi(1) = 1$ et que

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \psi(X^k) = X^k + kX^{k-1},$$

donc

$$M_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous différents de 0, donc elle est inversible.
3❧ Ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $\operatorname{Sp}\psi = \{1\}$.

Pour $n \geqslant 2$, la matrice est distincte de I_n, donc elle n'est pas diagonalisable.

En revanche, pour $n = 1$, elle est diagonale (*soupir*).