RMS 2022 [1134]

1❧ *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

2❧ *Trouver une matrice* $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *telle que* $B^2 = A$.

3❧ *Les matrices* $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *telles que* $B^2 = A$ *sont-elles diagonalisables ?*

1❧ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -3 \\ 2-\lambda & 5-\lambda & -2 \\ 2-\lambda & 3 & -\lambda \end{vmatrix} && (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} && \left(\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}\right) \\
&= (2-\lambda)^2(4-\lambda).
\end{aligned}$$

Donc le polynôme caractéristique de A est $(X-2)^2(X-4)$: le spectre de A est égal à $\{2;4\}$. Les matrices

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

sont toutes les deux de rang 1, donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

Ces matrices nous indiquent que

$$\operatorname{Ker}(A - 2I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et que} \quad \operatorname{Ker}(A - 4I_3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2❧ Comme $(X-2)$ et $(X-4)$ sont scindés et n'ont pas de racine commune, ils sont premiers entre eux, donc $(X-2)^2$ et $(X-4)$ sont premiers entre eux et, d'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(A - 4I_3) \oplus \operatorname{Ker}(A - 2I_3)^2. \tag{$\star$}$$

La matrice

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nous indique que $\operatorname{Ker}(A-2I_3)^2$ est le plan d'équation $[2x-y-z=0]$. Comme le vecteur $(0,1,-1)$ appartient à ce plan sans être colinéaire au vecteur $(1,1,1)$ (qui dirige $\operatorname{Ker}(A-2I_3)$), on dispose d'une base de $\operatorname{Ker}(A-2I_3)^2$.

❧ On constate que

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

est donc inversible : c'est la matrice de passage de la base canonique à une base adaptée à la décomposition $(\star)$, constituée d'un vecteur propre ε_1 associé à 4 ; d'un vecteur propre ε_2 associé à 2 et d'un vecteur ε_3 tel que

$$(A-2I_3)(\varepsilon_3)=\varepsilon_2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad A\varepsilon_3 = 0\cdot\varepsilon_1 + 1\cdot\varepsilon_2 + 2\cdot\varepsilon_3.$$

D'après la formule de changement de base,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

❧ Si B est une matrice telle que

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \alpha \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

alors

$$P^{-1}B^2P = (P^{-1}BP)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{2}\alpha \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et il suffit de choisir $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ pour obtenir

$$P^{-1}B^2P = P^{-1}AP$$

et donc $B^2 = A$.

✍ *Pour ceux qui attachent de l'importance à ces détails,*

$$P^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -10 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}$$

et le calcul explicite de B est particulièrement pénible.

✍ *On a une excellente raison de chercher $P^{-1}BP$ sous forme triangulaire.*
En effet, si $B^2 = A$, alors $A.B = B^3 = B.A$, donc chaque sous-espace propre de A est stable par B *et comme ces sous-espaces sont des* droites, *les vecteurs ε_1 et ε_2 qui les dirigent sont en fait des vecteurs propres de B. Ainsi, $P^{-1}BP$ est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Mais de plus chaque sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_3)^m$ de A est stable par B *(cette notion n'est pas au programme), donc $P^{-1}BP$ est diagonale par blocs :*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Cela nous indique sous quelle forme chercher $P^{-1}BP$ et nous assure qu'il n'y a pas beaucoup d'autres solutions que celle qu'on vient d'exhiber.

3❧ Si B était diagonalisable, alors $B^2 = A$ serait aussi diagonalisable : aucune des solutions de l'équation n'est donc diagonalisable.