RMS 2022 [881]

Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$, une variable aléatoire.

1❧ *Démontrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k) = (n+1)\,\mathbf{P}(X > n) + \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(X = k).$$

2❧ *On suppose que X est une variable aléatoire d'espérance finie. Démontrer que*

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1)\,\mathbf{P}(X > n) = 0.$$

Que peut-on en déduire sur la série $\sum \mathbf{P}(X > n)$?

3❧ *On suppose que X n'est pas une variable aléatoire d'espérance finie. Démontrer que la série $\sum \mathbf{P}(X > n)$ est divergente.*

1❧ Pour $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$[X > k] = [X = k+1] \sqcup \cdots [X = n] \sqcup [X > n]$$

et par additivité de $\mathbf{P}$,

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X > k) = \mathbf{P}(X > n) + \sum_{i=k+1}^{n} \mathbf{P}(X = i).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > n) + \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k+1}^{n} \mathbf{P}(X = i) \\ &= (n+1)\,\mathbf{P}(X > n) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{i-1} \mathbf{P}(X = i) \\ &= (n+1)\,\mathbf{P}(X > n) + \sum_{i=1}^{n} i\,\mathbf{P}(X = i). \end{aligned}$$

Il reste à rajouter le terme $i\,\mathbf{P}(X = i)$ pour $i = 0$, qui est évidemment nul, pour obtenir le résultat souhaité.

2❧ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[X > n] = \bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} [X = k].$$

Il s'agit d'une union **dénombrable** d'événements deux à deux disjoints, donc la série $\sum \mathbf{P}(X = k)$ est convergente et

$$\mathbf{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)$$

(par σ-additivité de $\mathbf{P}$).

Si X est d'espérance finie, alors la série $\sum k\,\mathbf{P}(X = k)$ est convergente et en particulier

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(X = k) = 0.$$

Or

$$\forall\, k \geqslant n+1, \quad 0 \leqslant (n+1)\,\mathbf{P}(X = k) \leqslant k\,\mathbf{P}(X = k)$$

et donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant (n+1)\,\mathbf{P}(X > n) = (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(X = k).$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = 0.$$

❧ La relation démontrée précédemment montre que la suite des sommes partielles de $\sum \mathbf{P}(X > n)$ est convergente (somme de deux suites convergentes), ce qui prouve que la série $\sum \mathbf{P}(X > n)$ est convergente et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{E}(X).$$

3❧ Si X n'est pas d'espérance finie, alors la série de terme général positif $\sum k\,\mathbf{P}(X = k)$ est divergente, donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.
D'après la relation établie à la première question,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > n) \geqslant \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(X = k)$$

et par comparaison, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > n) = +\infty.$$

❧ On a donc démontré qu'une variable aléatoire <u>à valeurs dans $\mathbb{N}$</u> est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum \mathbf{P}(X > k)$ est convergente et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k).$$

✍ *On peut aboutir au même résultat en démontrant que la famille $(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ définie par*

$$\forall\, 0 \leqslant n \leqslant k, \quad u_{n,k} = 0$$

et par

$$\forall\, 0 \leqslant k < n, \quad u_{n,k} = \mathbf{P}(X = n)$$

est sommable si, et seulement si, X est une variable aléatoire d'espérance finie. (Évidemment, il faut utiliser plusieurs fois le Théorème de Fubini.)