RMS 2022 [599]

Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

1 *Étudier la continuité de* f.

2 *Calculer un équivalent de* f *au voisinage de* $+\infty$.

3 *Calculer un équivalent de* f *au voisinage de* 0.

Une remarque préalable : pour tout $x \neq 0$, le terme général de la série est $\mathcal{O}(1/n^2)$ et pour $x = 0$, le terme général ne tend pas vers 0, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

Comme elle est évidemment paire, il suffit de l'étudier sur $]0, +\infty[$.

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n définie par

$$\forall\, x > 0, \quad u_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$$

est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, par monotonie de u_n, pour tout $a > 0$,

$$\forall\, x \geqslant a, \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant u_n(a)$$

ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$. La somme f est donc continue sur

$$\bigcup_{a>0} [a, +\infty[=]0, +\infty[.$$

2 Essayons de deviner l'équivalent de $f(x)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$$

on peut imaginer que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

Il reste à vérifier cette conjecture : pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6x^2} - f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^2x^2} - \frac{1}{1+n^2x^2}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2(1+n^2x^2)}\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad 0 \leqslant \frac{\pi^2}{6x^2} - f(x) \leqslant \frac{\zeta(4)}{x^4}.$$

Par conséquent, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{\pi^2}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{\pi^2}{6x^2}.$$

✍ *Variante : pour tout $x > 0$,*

$$x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$$

et cette nouvelle série de fonctions converge normalement sur $]0, +\infty[$ *puisque*

$$\forall\, x > 0, \qquad 0 \leqslant \frac{x^2}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2}.$$

On peut alors appliquer le théorème d'interversion des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

et retrouver ainsi l'équivalent calculé ci-dessus.

3❧ Lorsque x tend vers 0, le terme général de la série tend vers 1 : cela permet de deviner que f tend vers $+\infty$ mais pas de deviner son ordre de grandeur...

Il est temps de remarquer que la fonction φ définie par

$$\forall\, (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \quad \varphi(t, x) = \frac{1}{1+t^2x^2}$$

est une fonction continue, positive et décroissante de t pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme on a démontré que la série $\sum \varphi(n, x)$ était convergente pour tout $x > 0$, on en déduit que $[t \mapsto \varphi(t, x)]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $x > 0$ et nous allons pouvoir comparer cette intégrale à la somme $f(x)$.

En s'aidant d'une figure, on arrive à

$$\forall\, x > 0, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2}.$$

Avec le changement de variable $u = xt$, on en déduit que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right) \leqslant f(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}.$$

Cet encadrement prouve que

$$f(x) \underset{x\to0+}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

et en particulier que f tend vers $+\infty$ au voisinage droit de 0.

✍ *Comme f est une fonction* paire, *on en déduit que*

$$f(x) \underset{x\to0-}{\sim} \frac{\pi}{2|x|}.$$