RMS 2022 [571]

> *Pour* $x > 1$, *on pose*
> $$F(x) = \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{e^t}{t}\,dt.$$
> **1❧** *Déterminer la limite de* F *au voisinage droit de* 1.
> **2❧** *Démontrer que* F *est injective.*

❧ Tout d'abord, la fonction

$$f = \left[t \mapsto \frac{e^t}{t}\right]$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 1$, le segment $[\ln x, 2\ln x]$ est contenu dans $]0, +\infty[$. Par conséquent, l'expression $F(x)$ est bien définie pour tout $x > 1$ (intégrale d'une fonction continue sur un segment).

1❧ Soit $x > 1$. Par croissance de la fonction exp,

$$\forall\, t \in [\ln x, 2\ln x], \quad \frac{x}{t} = \frac{e^{\ln x}}{t} \leqslant \frac{e^t}{t} \leqslant \frac{e^{2\ln x}}{t} = \frac{x^2}{t}.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\forall\, x > 1, \quad x\int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{dt}{t} \leqslant f(x) \leqslant x^2 \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{dt}{t}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, x > 1, \qquad x\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2 \ln 2.$$

On peut conclure par encadrement :

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \ln 2.$$

✍ *Variante plus compliquée, qui permet néanmoins de réviser plusieurs idées intéressantes...*

On peut aussi utiliser le développement en série entière de la fonction exp.

Si le rayon de convergence d'une série entière est infini, il y convergence normale sur le segment $[\ln x, 2\ln x]$ *(quel que soit* $x > 1$*) et par conséquent*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}\,dt \\
&= \ln 2 + \int_{\ln x}^{2\ln x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k!}\,dt && \text{(linéarité)} \\
&= \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{\ln x}^{2\ln x} \frac{t^{k-1}}{k!}\,dt && \text{(intégration terme à terme)} \\
&= \ln 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k - 1)\ln^k x}{k.k!}
\end{aligned}$$

On vérifie sans peine que le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{(2^k-1)u^k}{k.k!}$$

est infini. Sa somme est donc continue sur $\mathbb{R}$ *et par composition de limites,*

$$\lim_{x\to 1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k - 1)\ln^k x}{k.k!} = \lim_{u\to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2^k-1)u^k}{k.k!} = 0.$$

On a ainsi redémontré que $f(x)$ *tendait vers* $\ln 2$ *au voisinage de* 1.

$\boxed{2}$❧ D'après le Théorème fondamental, la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall\, x > 1, \quad F'(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{e^{2\ln x}}{2\ln x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x} > 0.$$

Comme F est strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$, elle est injective.