RMS 2022 [1192]

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{a}{k+1}\binom{n-1}{k-1}.$$

1❧ *Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, déterminer α tel que*

$$\binom{n}{k} = \alpha\binom{n-1}{k-1}.$$

2❧ *Que vaut le réel a ?*

3❧ *Calculer l'espérance de X.*

4❧ *Calculer la variance de X.*

1❧ Ultra-classique :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{k\cdot(k-1)!\big[(n-1)-(k-1)\big]!} = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$.

On rappelle une autre formule ultra-classique, conséquence de la formule du binôme :

$$\forall\, n \geqslant 1, \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n.$$

2❧ Comme $\big([X = k]\big)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements, il faut que

$$1 = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(X=k) = a\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

D'après la relation précédente (avec un décalage d'indices),

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

puisqu'il manque un terme ($\ell = 0$) pour la formule du binôme. Ainsi,

$$a = \frac{n+1}{2^{n+1}-1}.$$

3❧ Comme X est une variable aléatoire bornée, elle admet des moments de tout ordre et en particulier, c'est une variable d'espérance finie et de variance finie.

On part de la définition de la variance et on recourt à l'Astuce taupinale :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(X=k)\\ &= a\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)-1}{k+1}\binom{n}{k}\\ &= a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{a}{k+1}\binom{n}{k} = 2^n a - 1.\end{aligned}$$

Après simplification,

$$\mathbf{E}(X) = \frac{2^n(n-1)+1}{2^{n+1}-1}.$$

$\boxed{4}$ Nous allons calculer la variance de manière indirecte : la question précédente nous indique qu'il faut utiliser l'Astuce taupinale pour réussir à calculer ces sommes. Après quelque réflexion, on devine qu'il faut commencer le calcul de la manière suivante.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[X(X+1)\big] &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1)\,\mathbf{P}(X=k) \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k+1)}{k+1} \binom{n}{k} \\
&= a \sum_{\color{red}k=1}^{n} k \binom{n}{k} \\
&= a \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} = na \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} = 2^{n-1} na
\end{aligned}$$

Pour conclure, on remarque que

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big[X(X+1)\big] - \mathbf{E}(X) - \big[\mathbf{E}(X)\big]^2$$

et après quelques simplifications, on arrive à

$$\mathbf{V}(X) = 2^{n-1}(n+2)a - 4^n a^2 = \frac{2^{n-1}(n+1)(n+2)}{2^{n+1}-1} - \left(\frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}-1}\right)^2.$$

✍ *Exercice purement calculatoire, sans contenu mathématique identifié* — à l'ancienne *! Quelques lignes de Python permettent de vérifier l'exactitude des expressions trouvées.*