Banque CCINP [105]

Pour un dé truqué, la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $1/2$.
On dispose de 100 dés, dont 25 sont truqués.

1❧ *On choisit un dé au hasard parmi ces 100 dés, on le lance... et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit truqué ?*

2❧ *On choisit un dé au hasard parmi ces 100 dés, on le lance n fois (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et... on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n pour que ce dé soit truqué ?*

3❧ *Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$. Comment interpréter ce résultat ?*

1❧ Il faut commencer par construire un modèle probabiliste ! On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ avec un événement $T \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mathbf{P}(T) = \frac{1}{4}$$

et un événement $S \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mathbf{P}(S \mid T) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(S \mid T^c) = \frac{1}{6}.$$

L'événement T s'interprète comme le fait de choisir un dé truqué et l'événement S, comme le fait d'obtenir 6 en lançant le dé.

Le fait de connaître la nature du dé influence la valeur des probabilités : on définit les probabilités conditionnelles sachant T ou T^c.

Enfin, à chaque fois que c'était nécessaire (= quand l'énoncé n'indiquant rien), on a posé l'hypothèse habituelle d'équiprobabilité :

— il y a 25 dés truqués parmi 100, soit une proportion de $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$;
— il y a six faces et une seule porte le chiffre 6, soit une proportion de $\frac{1}{6}$.

✍ *Avec les règles du calcul des probabilités, les hypothèses qu'on vient de faire permettent de calculer les probabilités des événements*

$$S \cap T, \quad S^c \cap T, \quad S \cap T^c \quad \textit{et} \quad S^c \cap T^c.$$

Comme ces événements forment un système complet d'événements, on peut en déduire que le problème ainsi posé est bien posé *: la probabilité de tout événement appartenant à la tribu engendrée par S et T est déterminée et peut être calculée en appliquant les règles bien connues.*

On peut alors traduire la question posée : il s'agit de calculer $\mathbf{P}(T \mid S)$.

D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(S) = \mathbf{P}(S \mid T) \cdot \mathbf{P}(T) + \mathbf{P}(S \mid T^c) \cdot \mathbf{P}(T^c) = \frac{1}{4}.$$

D'après la formule de Bayes,

$$\mathbf{P}(T \mid S) = \frac{\mathbf{P}(S \mid T) \cdot \mathbf{P}(T)}{\mathbf{P}(S)} = \frac{1}{2}.$$

2❧ Il faut maintenant compléter notre modèle probabiliste.

On suppose que la tribu $\mathcal{A}$ contient une suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ d'événements tels que :

— pour la mesure $\mathbf{P}_T$, ces événements soient indépendants et de probabilité $1/2$;
— pour la mesure $\mathbf{P}_{T^c}$, ces événements soient indépendants et de probabilité $1/6$.

L'événement S_n doit être compris comme le fait d'obtenir le chiffre 6 lors du n-ième lancer.

✍ *Cette fois, il serait bien plus compliqué de justifier que notre modèle probabiliste est cohérent...*

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_1 \cdots S_n) &= \mathbf{P}(S_1 \cdots S_n \mid T) \cdot \mathbf{P}(T) + \mathbf{P}(S_1 \cdots S_n \mid T^c) \cdot \mathbf{P}(T^c) \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{1}{4} + \frac{1}{6^n}\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}p_n = \mathbf{P}(T \mid S_1 \cdots S_n) &= \frac{\mathbf{P}(S_1 \cdots S_n \mid T) \cdot \mathbf{P}(T)}{\mathbf{P}(S_1 \cdots S_n)} \\ &= \frac{\frac{1}{2^n}\frac{1}{4}}{\frac{1}{2^n}\frac{1}{4} + \frac{1}{6^n}\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{1 + 3^{1-n}}.\end{aligned}$$

✍ *On retrouve bien le résultat du cas précédent avec $n = 1$.*

On rappelle que, avec un dé truqué, la probabilité d'obtenir n fois de suite le chiffre 6 est très, très faible : 2^{-n-2} ! Mais cette probabilité est néanmoins bien plus grande que celle d'obtenir n fois de suite le chiffre 6 avec un dé normal (de l'ordre de 6^{-n}).

$\boxed{3}$❧ Il est alors clair que p_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

❧ Le fait de choisir un dé truqué favorise l'apparition du chiffre 6. Par conséquent, si on obtient le chiffre 6, on peut imaginer qu'on ait choisi un dé truqué, en vertu du vieux proverbe : *c'est aux fruits qu'on reconnaît l'arbre*.

Si on obtient le chiffre 6 au premier tirage, la probabilité d'avoir choisi un dé truqué est montée à $1/2$ alors que la proportion de dés truqués n'est que d'un quart.

Si on obtient plusieurs fois le chiffre 6, on peut légitimement avoir de sérieux doutes. Le calcul final nous dit qu'en obtenant une série infiniment longues de 6, on peut être à peu près sûr qu'on a choisi un dé truqué.

Cette démarche intellectuelle est assez ancienne, notamment dans le droit anglo-saxon, et se retrouve aussi en intelligence artificielle (classification bayesienne).