RMS 2022 [1182]

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2 et 3. On effectue des tirages avec remise successifs.
On note Y, l'entier aléatoire correspondant au numéro du tirage où on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu.
On note Z, l'entier aléatoire correspondant au numéro du tirage où on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

1❧ *Déterminer la loi de* Y.

2❧ *Reconnaître la loi de* $Y-1$. *En déduire l'espérance et la variance de* Y.

3❧ *Déterminer la loi du vecteur* (Y,Z).

4❧ *En déduire la loi de* Z.

On modélise l'expérience par une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$.

La valeur de X_n indique le jeton obtenu lors du n-ième tirage.

1❧ Pour obtenir deux jetons différents, il faut tirer au moins deux jetons...
Pour tout entier $n\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}[Y=n]&=[X_1=\cdots=X_{n-1}\neq X_n]\\&=\bigsqcup_{i\in[\![1,3]\!]}[X_1=\cdots=X_{n-1}=i,X_n\neq i]\in\mathcal{A}.\end{aligned}$$

Cette égalité démontre que Y est bien une variable aléatoire discrète sur l'espace $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$. Par additivité de $\mathbf{P}$, on en déduit aussi que

$$\forall\,n\geqslant 2,\quad \mathbf{P}(Y=n)=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3^{n-1}}$$

puisque les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes et que

$$\forall\,k\geqslant 1,\ \forall\,i\in[\![1,3]\!],\quad \mathbf{P}(X_k=i)=\frac{1}{3}=1-\mathbf{P}(X_k\neq i).$$

2❧ La variable aléatoire $(Y-1)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$\forall\,k\in\mathbb{N}^*,\qquad [Y-1=k]=[Y=k+1].$$

Par conséquent,

$$\forall\,k\geqslant 1,\quad \mathbf{P}(Y-1=k)=\frac{2}{3^{(k+1)-1}}=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

La variable aléatoire $(Y-1)$ suit donc la loi géométrique $\mathscr{G}(2/3)$. On en déduit que

$$\mathbf{E}(Y-1)=\frac{1}{p}=\frac{3}{2}\quad\text{et}\quad\mathbf{V}(Y-1)=\frac{q}{p^2}=\frac{3}{4}$$

et donc que $\mathbf{E}(Y)=5/2$ (par linéarité) et $\mathbf{V}(Y)=3/4$ (invariance de la variance par translation).

3❧ Le nombre Z de tirages nécessaires pour obtenir les trois jetons est strictement supérieur au nombre Y de tirages nécessaires pour obtenir deux jetons différents.

Chaque succession de tirages définit une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_3$: le premier jeton qui apparaît est $\sigma(1)$; le premier jeton différent du précédent, qui apparaît au Y-ième tirage, est $\sigma(2)$; le dernier jeton, qui apparaît au Z-ième tirage, est $\sigma(3)$. Ainsi, avant le Y-ième tirage, on ne tire que le jeton $\sigma(1)$; entre le Y-ième tirage et le Z-ième tirage, on tire à nouveau un jeton déjà tiré, c'est-à-dire $\sigma(1)$ ou $\sigma(2)$ mais pas $\sigma(3)$.

Par conséquent, quels que soient les entiers m et n tels que $2 \leqslant m < n$,

$$\begin{aligned}
[Y = m, Z = n] &= \big[X_1 = \cdots = X_{m-1} \neq X_m\big] \\
&\qquad\qquad \cap \big[X_{m+1}, \dots, X_{n-1} \in \{X_{m-1}, X_m\}\big] \\
&\qquad\qquad \cap \big[X_n \notin \{X_{m-1}, X_m\}\big] \\
&= \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \big[X_1 = \cdots = X_{m-1} = \sigma(1), X_m = \sigma(2)\big] \\
&\qquad\qquad \cap \big[X_{m+1} \neq \sigma(3), \dots, X_{n-1} \neq \sigma(3)\big] \\
&\qquad\qquad \cap \big[X_n = \sigma(3)\big] \\
&\in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

ce qui prouve, si besoin était, que (Y, Z) est un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et donc que Z est bien une variable aléatoire.

Comme les variables aléatoires X_k sont indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$, tous les événements qui apparaissent dans la décomposition précédente de $[Y = m, Z = n]$ ont même probabilité :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m-1} \cdot \frac{1}{3}$$

et comme $\#\mathfrak{S}_3 = 6$,

$$\forall\, 2 \leqslant m < n, \qquad \mathbf{P}(Y = m, Z = n) = \frac{3}{2^m} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$\boxed{\textbf{4}}$ Connaissant la loi du couple (Y, Z), il est facile d'en déduire la loi (marginale) de Z.

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad \mathbf{P}(Z = n) = \sum_{m=2}^{n-1} \mathbf{P}(Y = m, Z = n) = \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}}.$$