RMS 2022 [455]

*$\boxed{1}$ Soit E, un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On rappelle que, par définition, un sous-espace H de E est un **hyperplan** si, et seulement si, il existe une droite vectorielle D telle que H et D soient supplémentaires dans E.*
Démontrer qu'un sous-espace H de E est un hyperplan si, et seulement si, il existe une forme linéaire ℓ sur E, non identiquement nulle, telle que

$$\mathsf{H} = \operatorname{Ker} \ell.$$

$\boxed{2}$ Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\Phi(A) = [M \mapsto \operatorname{tr}(AM)].$$

Démontrer que l'application Φ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual $E^* = L\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$.
$\boxed{3}$ Démontrer que la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \quad 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

est inversible et calculer $\operatorname{tr}(J_r C)$ pour $1 \leqslant r \leqslant n$.
$\boxed{4}$ En déduire que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

$\boxed{1}$ Supposons que H soit un hyperplan de E. Par définition, il existe une droite D telle que

$$\mathsf{E} = \mathsf{H} \oplus \mathsf{D}$$

et comme D est une droite, il existe un vecteur u (non nul !) tel que $\mathsf{D} = \mathbb{K} \cdot u$. Pour tout vecteur $x \in \mathsf{E}$, il existe donc un unique couple

$$\big(y, \ell(x)\big) \in \mathsf{H} \times \mathbb{K} \quad \text{tel que} \quad x = y + \ell(x) \cdot u. \tag{1}$$

On a ainsi défini une application $\ell : \mathsf{E} \to \mathbb{K}$.

► Étant donnés deux vecteurs x_1 et x_2 dans E, il existe donc deux vecteurs y_1 et y_2 dans H et deux scalaires $\ell(x_1)$ et $\ell(x_2)$ tels que

$$x_1 = y_1 + \ell(x_1) \cdot u \quad \text{et} \quad x_2 = y_2 + \ell(x_2) \cdot u.$$

Pour tout scalaire α, on a donc

$$\alpha \cdot x_1 + x_2 = (\alpha \cdot y_1 + y_2) + \big[\alpha\ell(x_1) + \ell(x_2)\big] \cdot u.$$

Mais en appliquant (1) au vecteur $\alpha \cdot x_1 + x_2$, on a aussi

$$\alpha \cdot x_1 + x_2 = \underbrace{z_1}_{\in \mathsf{H}} + \ell(\alpha \cdot x_1 + x_2) \cdot u$$

et l'unicité de la décomposition (1) permet d'identifier terme à terme :

$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathsf{E},\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \quad \ell(\alpha \cdot x_1 + x_2) = \alpha\ell(x_1) + \ell(x_2),$$

ce qui prouve que ℓ est bien une forme linéaire sur E.

► Comme $u = 0_{\mathsf{E}} + 1 \cdot u$ avec $0_{\mathsf{E}} \in \mathsf{H}$ et $1 \in \mathbb{K}$, l'unicité de la décomposition (1) nous dit que $\ell(u) = 1$, donc la forme linéaire ℓ n'est pas identiquement nulle.

► Si $\ell(x) = 0$, alors $x = y + \ell(x) \cdot u = y \in \mathsf{H}$.

Réciproquement, si $x \in \mathsf{H}$, alors $x = x + 0 \cdot u$ avec $x \in \mathsf{H}$ et $0 \in \mathbb{K}$. À nouveau, l'unicité de la décomposition (1) nous donne $\ell(x) = 0$.

L'hyperplan H est donc bien le noyau de la forme linéaire ℓ.

❧ Réciproquement, si H est le noyau d'une forme linéaire ℓ non identiquement nulle, alors il existe un vecteur u tel que $\ell(u) \neq 0$. Par linéarité de ℓ, ce vecteur u ne peut être nul et

$$\forall\, x \in H, \quad \ell(x) = \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot \ell(u) = \ell\Big(\frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u\Big),$$

donc la différence

$$x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u$$

appartient à $\operatorname{Ker} \ell = H$ (principe de superposition).

Chaque vecteur $x \in E$ admet donc une décomposition

$$\underbrace{\Big[x - \frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u\Big]}_{\in H} + \underbrace{\frac{\ell(x)}{\ell(u)} \cdot u}_{\in \mathbb{K} \cdot u},$$

ce qui prouve que $E = H + \mathbb{K} \cdot u$.

Enfin, comme $\ell(u) \neq 0$, le vecteur u n'appartient pas à H et la droite dirigée par $\mathbb{K} \cdot u$ est donc en somme directe avec H.

On a ainsi démontré que $E = H \oplus D$ et donc que H est un hyperplan.

✍ *Il est utile de retenir une vision géométrique de ce résultat, plus évident qu'il n'y paraît.*

Considérons un espace E de dimension 3 et un plan $P \subset E$: il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de ce plan et on peut la compléter en une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E. À cette base correspondent des formes coordonnées ε_1^*, ε_2^*, ε_3^* telles que

$$\forall\, u \in E, \qquad u = \varepsilon_1^*(u) \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_2^*(u) \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_3^*(u) \cdot \varepsilon_3$$

et on voit qu'ici le plan P est le noyau de la forme coordonnée ε_3^* :

$$u \in P \iff \varepsilon_3^*(u) = 0.$$

Plus concrètement encore, quelle que soit la base choisie dans E, le plan P peut être représenté par une équation cartésienne, au sens où

$$u : (x, y, z) \in P \iff ax + by + cz = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Le plan P apparaît donc comme le noyau de la forme linéaire ℓ définie par

$$\forall\, u : (x, y, z) \in E, \qquad \ell(u) = ax + by + cz.$$

On s'est contenté de démontrer que ce cas très particulier était en fait le cas général !

2❧ Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Par bilinéarité du produit matriciel et par linéarité de la trace, il est clair que l'application

$$\Phi(A) = [M \mapsto \operatorname{tr}(AM)]$$

est une application linéaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire une forme linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. L'application Φ est donc bien une application de $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ dans l'espace dual $E^* = L\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big)$ des formes linéaires sur E.

❧ Soient A et B, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et λ, un scalaire. Alors

$$\begin{aligned}\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \operatorname{tr}\big[(\lambda A + B)M\big] &= \operatorname{tr}(\lambda AM + BM)\\ &= \lambda \operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(BM)\\ &= \lambda \Phi(A)(M) + \Phi(B)(M).\end{aligned}$$

Cette relation étant vraie pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on en déduit que

$$\Phi(\lambda A + B) = \lambda \Phi(A) + \Phi(B)$$

et donc que Φ est une application *linéaire* de E dans E^*.

❧ On sait que $\dim \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ et que $\dim L\big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big) = n^2 \times 1 = n^2$, c'est-à-dire que l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont deux espaces de même dimension (finie !). D'après le Théorème du rang, il suffit que Φ soit injective pour que Φ soit un isomorphisme.

Soit donc $A \in \operatorname{Ker} \Phi$. Cela signifie que $\operatorname{tr}(AM) = 0$ pour *toute* matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Avec les notations habituelles,

$$\operatorname{tr}(AM) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} m_{j,i}.$$

Par conséquent, en faisant varier M dans la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad \operatorname{tr}(AE_{i,j}) = a_{i,j} = 0,$$

ce qui prouve que A est la matrice nulle.

On a ainsi démontré que Φ était un isomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual.

✍ *Avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut donner une interprétation euclidienne de ces calculs : comme*

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(A)(M) = \langle A^\top \,|\, M \rangle,$$

on n'a fait que redémontrer le Théorème de représentation de Riesz.

3❧ La matrice C est obtenue en permutant les colonnes de la matrice I_n, donc elles ont même rang : la matrice C est bien inversible.

❧ Multiplier à gauche par J_r revient à annuler les $(n - r)$ dernières lignes de la matrice C. Par conséquent,

$$\forall\, 1 \leqslant r \leqslant n, \quad \operatorname{tr}(J_r C) = 0.$$

4❧ Soit H, un hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc une forme linéaire *non nulle* ℓ telle que $H = \operatorname{Ker} \ell$ (première question) et une matrice A *non nulle* telle que

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \ell(M) = \operatorname{tr}(AM).$$

Comme A n'est pas nulle, son rang r est compris entre 1 et n et il existe deux matrices inversibles P et Q telles que

$$Q^{-1}AP = J_r, \quad \text{soit} \quad A = QJ_rP^{-1}.$$

Donc

$$\forall\, M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad \ell(M) = \operatorname{tr}(Q.J_rP^{-1}M) = \operatorname{tr}(J_rP^{-1}M.Q)$$

En choisissant

$$M = PCQ^{-1},$$

on définit une matrice inversible (produit de trois matrices inversibles) et $\ell(M) = \operatorname{tr}(J_rC) = 0$ d'après la question précédente. Par conséquent, l'hyperplan H contient la matrice inversible PCQ^{-1}.

On a ainsi démontré que tout hyperplan de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.