RMS 2022 [1202]

> *Pour $a > 0$, on pose*
> $$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/a & 1/a^2 & 0 \end{pmatrix}.$$
> $\boxed{1❧}$ *Vérifier que $-1/a$ est une valeur propre de A.*
> $\boxed{2❧}$ *La matrice A est-elle diagonalisable ?*
> $\boxed{3❧}$ *Caractériser les sous-espaces propres de A.*

$\boxed{1❧}$ En écrivant
$$A + \frac{1}{a} I_3 = \begin{pmatrix} 1/a & a & a^2 \\ 1 & 1/a & 1 \\ 1/a & 1/a^2 & 1/a \end{pmatrix},$$
on constate que cette matrice n'est pas inversible puisque $C_3 = aC_2$. Cela prouve que $-1/a$ est une valeur propre de A et que le vecteur $(0, a, -1)$ est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

$\boxed{2❧}$ Il est clair que $\det A = 2$ et que $\operatorname{tr} A = 0$. En considérant A comme une matrice à coefficients *complexes*, il existe deux complexes α et β tels que
$$\frac{-1}{a} + \alpha + \beta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{-\alpha\beta}{a} = 2.$$
Les deux nombres α et β sont donc les racines du trinôme
$$X^2 + \frac{1}{a} X - 2a.$$
Les valeurs propres de A sont donc
$$\frac{-1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2a}\big(1 \pm \sqrt{1+8a^3}\big).$$

✍ *Comme $a > 0$, la première valeur propre est négative et la deuxième est positive. Comme les deux dernières sont distinctes, si A admet une valeur propre double, alors il faut que*
$$\frac{-1}{a} = \frac{1}{2a}\big(1 - \sqrt{1+8a^3}\big)$$
et donc que $a = 1$.

Pour $a = 1$, le sous-espace propre associé à -1 est le plan d'équation
$$[x + y + z = 0]$$
et la droite propre associée à la valeur propre 2 est évidemment la droite $\mathbb{R} \cdot (1, 1, 1)$ — "évidemment", car les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Dans la suite, on supposera donc $a \neq 1$ pour que la matrice A ait trois valeurs propres distinctes.

❧ Comme A admet trois valeurs propres deux à deux distinctes, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. On peut donc déduire du calcul précédent que
$$\operatorname{Ker}\Big(A + \frac{1}{a} I_3\Big) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \{\alpha, \beta\}$, l'une des deux autres valeurs propres de A.

✍ *Comme les deux valeurs propres α et β sont en quelque sorte conjuguées l'une de l'autre, on peut effectuer les deux calculs simultanément, en se bornant à savoir que la valeur propre λ vérifie la propriété*

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{a} - 2a = 0$$

c'est-à-dire

$$a\lambda^2 + \lambda - 2a^2 = 0. \qquad (\star)$$

On sait, par la discussion précédente, que le rang de $A - \lambda I_3$ est égal à 2. Si le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -\lambda & a \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

est nul, alors $\lambda^2 = a$ et on déduit de l'équation $(\star)$ que $a = 1$, cas que nous avons déjà traité. Par conséquent, le rang de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & a & a^2 \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

est égal à 2. Cette matrice est constituée des deux premières lignes de la matrice $(A - \lambda I_3)$, donc

$$(A - \lambda I_3)X = 0 \implies BX = 0,$$

c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3) \subset \mathrm{Ker}\, B$. Or ces deux matrices ont même rang et même nombre de colonnes, donc leurs noyaux ont même dimension (Théorème du rang), donc ces deux matrices ont même noyau.

✍ *La troisième ligne de $A - \lambda I_3$ ne fait que compliquer les calculs sans apporter d'information supplémentaire !*

Or

$$\begin{pmatrix} -\lambda & a & a^2 \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & a - \lambda^2 & a^2 + \lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2)$$

donc le sous-espace propre de A associé à λ est la droite dirigée par la colonne

$$\begin{pmatrix} a + \lambda a^2 \\ a^2 + \lambda \\ \lambda^2 - a \end{pmatrix}.$$

✍ *Il s'agit seulement de résoudre un système triangulaire !*

En conclusion, pour $a > 0$ et $a \neq 1$, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a + \alpha a^2 & a + \beta a^2 \\ a & a^2 + \alpha & a^2 + \beta \\ -1 & \alpha^2 - a & \beta^2 - a \end{pmatrix}$$

est inversible et

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1/a & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où $\alpha + \beta = 1/a$ et $\alpha\beta = -2a$.