RMS 2022 [1190]

> *Soient X et Y, deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi. On suppose que X admet un moment d'ordre deux et que la variable aléatoire*
>
> $$Z = X + Y + 1$$
>
> *suit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$.*
>
> **1❧** *Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ en fonction de p.*
>
> **2❧** *Calculer la fonction génératrice de X. En déduire la loi de X.*

1❧ Comme Z suit la loi $\mathscr{G}(p)$, alors $\mathbf{E}(Z) = 1/p$ et $\mathbf{V}(Z) = q/p^2$.
Comme X et Y ont même loi et par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) + 1 = 1 + 2\,\mathbf{E}(X)$$

et donc

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1-p}{2p} = \frac{q}{2p}.$$

❧ Par ailleurs, comme X et Y sont indépendantes,

$$\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = 2\,\mathbf{V}(X)$$

et donc $\mathbf{V}(X) = \frac{q}{2p^2}$.

2❧ Comme Z suit la loi $\mathscr{G}(p)$, alors

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_Z(t) = \frac{pt}{1-qt}.$$

Or $Z = X + Y + 1$ et comme X et Y sont indépendantes,

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_Z(t) = \mathbf{E}(t^Z) = \mathbf{E}(t^X.t^Y.t^1) = \mathbf{E}(t^X).\,\mathbf{E}(t^Y).t = t\big[G_X(t)\big]^2.$$

Or $G_X(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$ (somme de termes positifs), donc

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1-qt}}.$$

❧ On sait que

$$\begin{aligned}\forall\, u \in\,]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+u}} &= (1+u)^{-1/2} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots[-(2k-1)/2]}{k!}\, u^k.\end{aligned}$$

Par conséquent, avec $u = -qt$ (où $0 < q < 1$),

$$\forall\, t \in [0,1], \quad G_X(t) = \sqrt{p}\left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{2k}{k} \cdot \frac{q^k}{4^k} \cdot t^k\right].$$

Comme le rayon de convergence d'une série génératrice est au moins égal à 1, on peut identifier les coefficients terme à terme. On en déduit que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{\sqrt{p}\, q^k}{4^k} \binom{2k}{k}.$$