RMS 2022 [1203]

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que A est semblable à jA où $j = e^{2i\pi/3}$.

1❧ *Démontrer que*

$$\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \qquad j\lambda \in \mathrm{Sp}(A).$$

2❧ *En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.*

3❧ *Démontrer que $A^2 = 0_2$.*

4❧ *Ce dernier résultat est-il encore vrai si on suppose que $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$?*

1❧ Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Alors il existe une colonne $X \neq 0$ telle que $AX = \lambda X$ et donc telle que

$$j \cdot AX = j \cdot (\lambda X), \quad \text{soit} \quad (j \cdot A)X = (j\lambda) \cdot X$$

et comme $X \neq 0$, cela prouve que $j\lambda \in \mathrm{Sp}(jA)$.

✍ *Plus généralement, quel que soit le polynôme P et la valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, le scalaire $P(\lambda)$ est une valeur propre de la matrice $P(A)$.*

Comme A et jA sont semblables, elles ont même spectre et par conséquent $j\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

2❧ Comme A est une matrice à coefficients *complexes*, son spectre n'est pas vide. Il existe donc au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ pour A.

D'après la première question, $j\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et, par conséquent, $j^2\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ (en vertu du vieux principe : *Tant que je gagne, je joue*).

Si $\lambda \neq 0$, alors λ, $j\lambda$ et $j^2\lambda$ sont trois valeurs propres deux à deux distinctes de A. Comme $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$, c'est impossible.

Par conséquent, $\lambda = 0$ et donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

3❧ Comme A est une matrice $(2,2)$ à coefficients complexes, son polynôme caractéristique est un polynôme unitaire de degré 2 et, d'après la question précédente, ce polynôme admet 0 pour seule racine. Donc $\chi_A = X^2$ et, d'après le Théorème de Cayley-Hamilton, $A^2 = 0_2$.

4❧ Dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$, on peut poser

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad jA = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices A et jA sont diagonales et ont les mêmes coefficients diagonaux avec les mêmes multiplicité, donc elles sont semblables — et $A \neq 0_3$.

✍ *Pour permuter circulairement les valeurs propres, il suffit de permuter les vecteurs de la base. Une matrice P telle que $P^{-1}AP = jA$ est donc par exemple*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$