RMS 2022 [1137]

Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, diagonalisable et de rang 1. On se donne trois réels α, β et γ tels que

$$\alpha+\beta=\gamma, \qquad \beta+\gamma\neq 0 \quad \textit{et} \quad \beta\gamma\neq 0$$

et on considère la matrice

$$B=\begin{pmatrix}\alpha A & \beta A\\ \gamma A & 0_3\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_6(\mathbb{R}).$$

1❧ *Exprimer le polynôme caractéristique de B en fonction de celui de A. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de B ?*

2❧ *On suppose que $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ appartient au noyau de A. Vérifier que la colonne $\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}$ appartient au noyau de B. En déduire que* $\dim \operatorname{Ker} B \geqslant 4$.

3❧ *Démontrer que B est diagonalisable.*

1❧ Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\det(xI_6-B)&=\begin{vmatrix}xI_3-\alpha A & -\beta A\\ -\gamma A & xI_3\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}xI_3-\gamma A & -\beta A\\ xI_3-\gamma A & xI_3\end{vmatrix} && (C_1\leftarrow C_1+C_2 \text{ avec } \alpha+\beta=\gamma)\\ &=\begin{vmatrix}xI_3-\gamma A & -\beta A\\ 0_3 & xI_3+\beta A\end{vmatrix} && (L_2\leftarrow L_2-L_1)\end{aligned}$$

et par conséquent, comme $\beta\neq 0$ et $\gamma\neq 0$,

$$\det(xI_6-B)=\det(xI_3-\gamma A)\det(xI_3+\beta A)=(-\beta\gamma)^3\chi_A\Big(\frac{x}{\gamma}\Big)\chi_A\Big(\frac{-x}{\beta}\Big)$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

❧ Comme le rang de A est égal à 1, son noyau est de dimension 2 (Théorème du rang). Et comme A est diagonalisable, son polynôme caractéristique est de la forme

$$\chi_A=X^2(X-a)$$

avec $a\in\mathbb{R}^*$. Le polynôme caractéristique de B est donc égal à

$$X^4(X-a\gamma)(X+a\beta).$$

Comme $a\neq 0$ et que $\beta+\gamma\neq 0$, la matrice B admet donc trois valeurs propres distinctes : 0 (de multiplicité 4), $a\gamma$ (simple) et $-a\beta$ (simple).

❧ D'après le cours, une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé (c'est le cas pour B) et si la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre qui lui est associé.

Par ailleurs, on sait que la dimension d'un sous-espace propre est comprise entre 1 et la multiplicité de la valeur propre.

Par conséquent, la matrice B est diagonalisable si, et seulement si, la dimension du sous-espace propre $\operatorname{Ker} B=\operatorname{Ker}(B-0I_6)$ est égale à 4.

2❧ On suppose que $AX=0$. D'après les règles du calcul matriciel par blocs,

$$B\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha AX\\ \gamma AX\end{pmatrix}=0.$$

❧ Pour les mêmes raisons,

$$B\begin{pmatrix}0\\X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta AX\\ 0\end{pmatrix}=0.$$

Par hypothèse, $\dim \operatorname{Ker} A = 2$, donc il existe deux colonnes linéairement indépendantes X_1 et X_2 telles que $\ker A = \operatorname{Vect}(X_1, X_2)$. On déduit des calculs précédents que les colonnes

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ X_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

appartiennent au noyau de B. Comme X_1 et X_2 sont linéairement indépendantes, on en déduit facilement que ces quatre colonnes sont linéairement indépendantes et donc que $\dim \operatorname{Ker} B \geqslant 4$.

3❧ Comme la dimension d'un sous-espace propre est majorée par la multiplicité de la valeur propre, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker} B = 4$ et que B est diagonalisable.