RMS 2022 [1147]

Soient E*, un espace euclidien de dimension* n *;* $(e_1, \dots, e_n)$*, une base orthonormée de* E *et* $(x_1, \dots, x_n)$*, une famille de vecteurs de* E *telle que*

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 < 1.$$

1❧ *Démontrer que*

$$\forall\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \qquad \Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k \Big\|^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \Big).$$

2❧ *En déduire que la famille*

$$(e_1 + x_1, \dots, e_n + x_n)$$

est une base de E*.*

1❧ Par inégalité triangulaire et homogénéité,

$$0 \leqslant \Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k \Big\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|\lambda_k \cdot x_k\| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\, \|x_k\|$$

et d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\, \|x_k\| \Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \Big).$$

2❧ On dispose d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n, il suffit donc de démontrer qu'elle est libre pour en déduire qu'il s'agit d'une base de E.

❧ Considérons donc une famille de scalaires $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot (e_k + x_k) = 0_E$$

et donc telles que

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k \Big\|^2 = \Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k \Big\|^2.$$

Comme la famille $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est orthonormée,

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.$$

Si les λ_k ne sont pas tous nuls, alors la somme $\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2$ est strictement positive et, d'après la première question,

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k \Big\|^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \Big) < \Big(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \Big).$$

On en déduit alors que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 < \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2,$$

ce qui est absurde.

La famille $(e_k + x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est donc une base de E.

✍ *En écrivant la matrice de la famille* $(e_k + x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *relative à la base orthonormée* $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$*, on voit que cet exercice est une variante du lemme d'Hadamard sur les matrices à diagonale dominante (qui sont des matrices inversibles).*