Soient E, un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $f \in L(E)$.
Démontrer qu'il existe un endomorphisme $g \in L(E)$ telle que

$$f \circ g = 0 \quad \text{et} \quad f + g \in GL(E)$$

si, et seulement si,

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

✍ *Il faut penser à interpréter $f \circ g = 0$ par l'inclusion $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ et à traduire l'hypothèse $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ par l'existence d'un couple de projections ou d'une base de E adaptée à cette décomposition.*

❧ Supposons que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. Comme on dispose de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, la projection sur $\operatorname{Ker} f$ parallèlement à $\operatorname{Im} f$ est bien définie : nous noterons g, cette projection.

Pour tout $x \in E$, on a donc $g(x) \in \operatorname{Ker} f$ et par conséquent $f\big(g(x)\big) = 0_E$. Ainsi $f \circ g = 0$.

D'autre part, l'application $f + g$ est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie. D'après le Théorème du rang, $f + g$ est un automorphisme si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul.

Considérons donc un vecteur $x \in E$ tel que $(f + g)(x) = 0_E$. Comme $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E, il existe donc $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} f$ tels que

$$x = \underbrace{y}_{\in \operatorname{Ker} f} + \underbrace{z}_{\in \operatorname{Im} f}.$$

Par linéarité de f et par définition de g (comme projection), on en déduit que

$$f(x) = f(y) + f(z) = f(z) \quad \text{et} \quad g(x) = y.$$

Par conséquent,

$$0_E = (f + g)(x) = \underbrace{y}_{\in \operatorname{Ker} f} + \underbrace{f(z)}_{\in \operatorname{Im} f}.$$

Mais $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E, donc

$$y = f(z) = 0_E.$$

On remarque alors que $z \in \operatorname{Im} f$ (par hypothèse) et que $z \in \operatorname{Ker} f$, tandis que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$ (par hypothèse aussi). Donc $y = z = 0_E$ et on a bien : $x = 0_E$, ce qui prouve que $f + g \in GL(E)$.

✍ ***Variante matricielle.***

On considère une base de E adaptée à la décomposition en somme directe, c'est-à-dire une base de E définie en rassemblant une base $(e_1, \dots, e_{n-r})$ de $\operatorname{Ker} f$ et une base $(e_{n-r+1}, \dots, e_n)$ de $\operatorname{Im} f$ (avec $r = \operatorname{rg} f$). Comme les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par f, la matrice de f relative à une telle base est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & A_r \end{pmatrix}$$

avec $A_r \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{K})$. Comme $\operatorname{rg} A_r = \operatorname{rg} A = r$, on en déduit que la matrice A_r est inversible.

On peut alors considérer la matrice

$$B = \begin{pmatrix} I_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & 0_r \end{pmatrix}.$$

On a bien $AB = 0_n$ et la somme

$$A + B = \begin{pmatrix} I_{n-r} & 0_{n-r,r} \\ 0_{r,n-r} & A_r \end{pmatrix}$$

est une matrice inversible (puisqu'elle est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux inversibles).

***NB :** il ne s'agit pas vraiment d'une variante, c'est en fait exactement la même chose que ce qui précède mais sous forme matricielle.*

❧ Réciproquement, supposons qu'il existe un endomorphisme $g \in L(E)$ tel que $f \circ g = 0$ et que $f + g$ soit un automorphisme de E.

Comme f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, on déduit du Théorème du rang que

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}.$$

On considère donc un vecteur $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ et nous allons vérifier que ce vecteur est nécessairement nul.

Comme $f + g$ est un automorphisme, il existe un (unique) vecteur $z \in E$ tel que

$$x = (f+g)(z) = \underbrace{f(z)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{g(z)}_{\in \operatorname{Im} g}$$

et on sait que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ (puisque $f \circ g = 0$). Cette décomposition de x prouve que

$$E \subset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$$

et donc que

$$E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$$

(puisque l'inclusion réciproque est évidente).

D'après la Formule de Grassmann et le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f - \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)$$

et donc $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 0$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$ et donc que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans E.