RMS 2021 [1144]

On considère un espace euclidien E de dimension $n \geqslant 2$. Étant donnés un vecteur unitaire a et un réel k, on définit l'application f en posant

$$\forall\, x \in E, \quad f(x) = x + k\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle \cdot a.$$

1 *Démontrer que f est un endomorphisme de E.*

2 *Démontrer que*

$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, f(y) \,\rangle.$$

3 *Pour quels $k \in \mathbb{R}$ l'application f est-elle inversible ?*

4 *Exprimer $(f \circ f)(x)$ en fonction de $f(x)$ et de x.*

5 *Déterminer les éléments propres de f.*

1 L'application $[x \mapsto k\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle \cdot a]$ est linéaire (par linéarité à gauche du produit scalaire) et c'est une application de E dans E. Comme l'identité $[x \mapsto x]$ est aussi un endomorphisme de E, on en déduit que f est un endomorphisme de E.

2 Soient x et y dans E.

Comme $k\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle \in \mathbb{R}$ et que le produit scalaire est linéaire à gauche,

$$\langle\, f(x) \,|\, y \,\rangle = \langle\, x \,|\, y \,\rangle + k\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle\,\langle\, a \,|\, y \,\rangle.$$

De même, par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\langle\, x \,|\, f(y) \,\rangle = \langle\, x \,|\, y \,\rangle + k\,\langle\, y \,|\, a \,\rangle\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle.$$

Par symétrie du produit scalaire,

$$k\,\langle\, y \,|\, a \,\rangle\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle = k\,\langle\, a \,|\, y \,\rangle\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle = k\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle\,\langle\, a \,|\, y \,\rangle,$$

ce qui prouve que l'endomorphisme f est bien symétrique.

3 Comme f est un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, le Théorème du rang nous assure que f est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul.

Si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors

$$f(x) = x + k\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle \cdot a = 0_E$$

donc $x = -k\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle \cdot a$. On en déduit que le vecteur x est nécessairement colinéaire au vecteur a et donc que $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R} \cdot a$.

Or $f(a) = (1 + k\|a\|^2) \cdot a = (1+k) \cdot a$ puisque a est un vecteur unitaire.

Deux cas se présentent :

— si $k = -1$, alors $a \in \operatorname{Ker} f$ et donc $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R} \cdot a \neq \{0_E\}$;

— si $k \neq -1$, alors $a \notin \operatorname{Ker} f$ et donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Par conséquent, l'endomorphisme f est inversible si, et seulement si, $k \neq -1$.

4 Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f\big(x + k\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle \cdot a\big)\\ &= f(x) + k\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle \cdot f(a)\\ &= f(x) + (1+k)\big[k\,\langle\, x \,|\, a \,\rangle \cdot a\big]\\ &= f(x) + (1+k)\big[f(x) - x\big] = (2+k) \cdot f(x) - (1+k) \cdot x.\end{aligned}$$

✍ *On déduit de cette relation que le polynôme*

$$X^2 - (2+k)X + (1+k) = (X-1)(X-1-k)$$

est un polynôme annulateur de f.

$\boxed{5❧}$ Comme f est symétrique, il est diagonalisable (Théorème spectral) et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

On a déjà remarqué que $f(a) = (1+k) \cdot a$, donc a est un vecteur propre (unitaire, donc *non nul*) associé à la valeur propre $(1+k)$.

Si x est orthogonal à a, alors $f(x) = x = 1 \cdot x$, donc 1 est aussi une valeur propre de f.

On distingue à nouveau deux cas.

— Si $k = 0$, alors $f = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$.

— Si $k \neq 0$, alors $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 1+k\}$ et les sous-espaces propres associés à 1 et à $(1+k)$ sont respectivement la droite $\mathbb{R} \cdot a$ et l'hyperplan $(\mathbb{R} \cdot a)^{\perp}$.

✍ *Un endomorphisme est inversible si, et seulement si, son spectre ne contient pas 0. On a ainsi retrouvé le fait que f était inversible si, et seulement si, $k \neq -1$.*

✍ *Comme f est diagonalisable et qu'il admet 1 et $1+k$ pour valeurs propres, on en déduit que, si $k \neq 0$, alors son polynôme minimal est égal à $(X-1)(X-1-k)$.*

Pour $k = 0$, son polynôme minimal est évidemment $X - 1$.