RMS 2021 [1142]

Soit E, l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\forall\, f, g \in E, \quad \langle\, f \,|\, g \,\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

1❧ *Démontrer que $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est un produit scalaire sur E.*

2❧ *On pose $f_0 = [t \mapsto 1]$ et $f_1 = [t \mapsto t]$ et on note F, le sous-espace de E engendré par f_0 et f_1.*

❦ *Démontrer que* $\dim F = 2$.

❦ *Calculer $\langle\, f_0 \,|\, f_1 \,\rangle$.*

3❧ *L'application $g = [t \mapsto e^t]$ appartient-elle à F ?*

4❧ *Calculer le projeté orthogonal de g sur F.*

5❧ *En déduire*

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2\,dt.$$

1❧ Comme le produit fg est une fonction continue sur le segment $[-1, 1]$, l'intégrale $\langle\, f \,|\, g \,\rangle$ est bien définie. Donc $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Cette application est évidemment symétrique et elle est bilinéaire (par linéarité de l'intégrale).

Si $f = g$, alors la fonction intégrande f^2 est positive. Comme les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant, l'intégrale $\langle\, f \,|\, f \,\rangle$ est positive.

Si $\langle\, f \,|\, f \,\rangle = 0$, alors on a une fonction continue et positive dont l'intégrale sur $[-1, 1]$ est nulle. Donc $f^2(t) = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$ et par conséquent $f = 0_E$.

L'application $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$ est donc un produit scalaire sur E.

2❧ Le sous-espace F est engendré par deux vecteurs, donc sa dimension est inférieure à 2.

Ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre et par conséquent $\dim F = 2$.

❧ Comme $f_0 f_1$ est une fonction continue et impaire, son intégrale sur le segment $[-1, 1]$ est nulle (ce segment admet l'origine pour centre de symétrie).

Les deux vecteurs f_0 et f_1 sont donc orthogonaux.

3❧ Toute fonction $f \in F$ est une fonction affine. En particulier, sa dérivée seconde est nulle. Comme la dérivée seconde de g n'est pas nulle, $g \notin F$.

4❧ Puisqu'on connaît une base orthogonale de F, le projeté de g sur F est le vecteur h défini par

$$h = \frac{\langle\, g \,|\, f_0 \,\rangle}{\|f_0\|^2} \cdot f_0 + \frac{\langle\, g \,|\, f_1 \,\rangle}{\|f_1\|^2} \cdot f_1.$$

Or

$$\|f_0\|^2 = 2, \quad \|f_1\|^2 = \frac{2}{3}, \quad \langle\, g \,|\, f_0 \,\rangle = e - e^{-1}, \quad \langle\, g \,|\, f_1 \,\rangle = 2e^{-1}$$

puisque

$$\int^x te^t\,dt = [te^t]^x - \int^x e^t\,dt = (x-1)e^x.$$

Ainsi, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$h(t) = \frac{e - e^{-1}}{2} + 3e^{-1}t.$$

$\boxed{5}$ Il s'agit de calculer le minimum de

$$\left\| g - (af_0 + bf_1) \right\|^2.$$

On sait que ce minimum existe, qu'il est atteint seulement pour $af_0 + bf_1 = h$ et qu'il est égal à

$$\begin{aligned}\langle\, g - h \,|\, g \,\rangle &= \|g\|^2 - \frac{e - e^{-1}}{2} \langle\, g \,|\, f_0 \,\rangle - 3e^{-1} \langle\, g \,|\, f_1 \,\rangle \\ &= \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - \frac{(e - e^{-1})^2}{2} - 6e^{-2} = 1 - 7e^{-2}.\end{aligned}$$