RMS 2021 [1371]

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (n+1)u_n + (-1)^{n+1}.$$

On pose également

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{n!}.$$

1❧ *Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et de n.*

2❧ *En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.*

3❧ *En déduire que la série $\sum v_n x^n$ converge pour tout $x \in [0, 1[$.*

4❧ *Pour quels $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum u_n x^n$ est-elle convergente ?*

5❧ *Calculer le rayon de convergence et la somme S de la série entière $\sum v_n x^n$.*

1❧ D'après la relation de récurrence liant u_n et u_{n+1},

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = v_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2❧ On peut aussi écrire cette relation sous la forme

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Or la suite de terme général $\frac{1}{(n+1)!}$ tend vers 0 en décroissant, ce qui permet d'appliquer le Critère spécial des séries alternées. Par conséquent, la série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ est convergente, donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

✍ *On pourrait aussi remarquer que la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ est absolument convergente (à l'aide du Théorème de comparaison) — mais c'est sans importance pour répondre à la question posée.*

3❧ Pour $0 \leqslant x < 1$, la série géométrique $\sum x^n$ est absolument convergente. Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est en particulier bornée, donc

$$v_n x^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(x^n)$$

et d'après le Théorème de comparaison, la série $\sum v_n x^n$ est absolument convergente et donc convergente.

4❧ On sait que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Par télescopage,

$$v_n = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

donc la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à $e^{-1} > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *non nul*, on en déduit que

$$u_n x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1} n! x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$$

Par croissances comparées de x^n et de $n!$, on en déduit que la série $\sum u_n x^n$ est grossièrement divergente.

La série $\sum u_n x^n$ converge donc si, et seulement si, $x = 0$.

$\boxed{5❧}$ On a démontré plus haut que la série $\sum v_n x^n$ était absolument convergente pour $0 \leqslant x < 1$.

Pour $x = 1$, la série $\sum v_n x^n$ est grossièrement divergente (puisque son terme général tend vers $e^{-1} \neq 0$).

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum v_n x^n$ est égal à 1.

❧ Pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n + \left[1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right] \\ &= xS(x) + \exp(-x) \end{aligned}$$

donc

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

✍ *On en déduit que* $(1-x)S(x) = e^{-x}$ *et donc que*

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad (1-x)S'(x) - S(x) = -e^{-x}.$$

Mais on peut aussi vérifier que

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[, \quad S'(x) = \frac{x}{1-x} S(x).$$

À quoi peuvent servir ces équations différentielles ? Le calcul direct de $S(x)$ *les rend peu intéressantes...*